Lineare Gleichungen zwischen parabolischen Koordinaten.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Friedrich Güßmar
aus **Uelitz.**

ACAD. LUGD BAT BIBL.

Rostock.
Druck der Carl Boldt'schen Hofbuchdruckerei.
1911.

Referent:

Herr Professor Staude, Kaiserl. russ. Staatsrat a. D.

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553615_0016

Einleitung.

Das Problem, den Ort der Punkte zu finden, von denen aus betrachtet ein Kegelschnitt unter einem gegebenen Winkel ω oder dessen Nebenwinkel erscheint, hat schon die Aufmerksamkeit der französischen Mathematiker des 18. Jahrhunderts auf sich gezogen. Sie fanden als Ort eine bicirculare Kurve 4. Ordnung[1]), die sich für die Parabel zu einer Hyperbel vereinfachte. De la Hire[2]) bemerkte zuerst, daß mit $\omega = \pi/2$ die Kurve 4. Ordnung für die Ellipse und Hyperbel in einen mit ihnen concentrischen Kreis vom Radius $\sqrt{a^2 \mp b^2}$ übergeht, wo das obere Vorzeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel zu nehmen ist, und a^2 und b^2 die Halbachsenquadrate sind; für die Parabel vereinfacht sich in diesem Falle die Hyperbel zu einer doppelt zählenden Geraden, indem ihre beiden Zweige in die Direktrix der Parabel hineinfallen.

---

[1]) Encykl. d. math. Wissenschaften. Band III, 2. Heft 1, p. 29. Leipzig 1903.

[2]) Sect. con., p. 193—199. Par. Hist. (1704). Paris 1706, p. 220—232.

De l'Hospital[3]) untersuchte die Verhältnisse für die Parabel genauer und fand, daß stets ein Brennpunkt der bei beliebigem Winkel auftretenden Hyperbel mit dem Brennpunkt der Parabel zusammenfällt. Später erkannte Poncelet[4]) auch das Zusammenfallen der zugehörigen Direktricen.

Im Raume entsprechen den Tangentenpaaren der Kegelschnitte die Berührungskegel an die Flächen 2. Ordnung. Auch hier ist man an Fragen folgender Art herangetreten: Welches ist der Ort der Scheitel solcher Berührungskegel an eine gegebene Fläche 2. Ordnung, welche eine spezielle Form haben? Die Verhältnisse sind hier wesentlich komplizierter als in der Ebene. Sie lassen sich aber einfacher gestalten, wenn man elliptische oder parabolische Koordinaten einführt. Die gesuchten Örter lassen sich dann teilweise durch lineare Gleichungen in den neuen Koordinaten darstellen. Dadurch ist die oben gestellte Aufgabe auf die geometrische Diskussion dieser Gleichungen zurückgeführt. Für Rotationskegel, gleichseitige und dual gleichseitige Kegel ist die Aufgabe bereits gelöst.

Diese Bedeutung der linearen Gleichungen in den neuen Koordinaten veranlaßt mich, sie in der folgenden Arbeit allgemein zu behandeln, wobei ich mich aber auf Gleichungen zwischen parabolischen Koordinaten der Ebene und des Raumes beschränken will. Durch Spezialisierung der allgemeinen Gleichung werden wir dann auf Gleichungen der oben erwähnten Art kommen und so teils schon bekannte geometrische Örter wiederfinden, teils neue kennen lernen.

---

[3]) Sect con., p. 270.

[4]) Annal. de math. 8 (1818), p. 208 = Appl. d'annal. 2, p. 481 sowie Traité Nr. 481.

I. Abschnitt.

Über lineare Gleichungen zwischen parabolischen Koordinaten in der Ebene.

§ 1.

Das System konfokaler Parabeln.

Die Gleichung:

$$(1) \qquad (\beta v^2 + 2us) - \tau(u^2 + v^2) = 0$$

stellt eine Kegelschnittschar dar, von deren beiden Grundkurven:

$$\beta v^2 + 2us = 0,\ u^2 + v^2 = 0$$

die eine das imaginäre Kreispunktepaar ist. Die vier gemeinsamen Tangenten der Schar haben die Koordinaten:

$$u,\ v,\ s = 1,\ \pm i,\ \beta/_2;$$
$$u,\ v,\ s = 0,\ 0,\ 1;$$
$$u,\ v,\ s = 0,\ 0,\ 1,$$

worunter die unendlich ferne Gerade doppelt vorkommt. In Punktkoordinaten lautet die Gleichung (1):

$$(2) \qquad \frac{y^2}{\beta - \tau} + 2x + \tau = 0.$$

Durch diese Gleichung wird bei festem β und veränderlichem Parameter τ:

$$-\infty < \tau < +\infty$$

ein System konfokaler Parabeln dargestellt. Die Koordinaten des gemeinsamen Brennpunktes B_0, der Scheitelpunkte S und die Gleichungen der Direktricen D werden:

$$(3) \qquad B_0 : x = -\frac{\beta}{2},\ y = 0;\ S : x = -\frac{\tau}{2},\ y = 0;$$

$$D : x = \frac{\beta}{2} - \tau.$$

Je nachdem $-\infty < \tau < \beta$ oder $\beta < \tau < +\infty$, ist die Parabel (2) eine linke oder rechte Parabel. Wir nennen ihre Parameter beziehungsweise $\tau = \lambda$, $\tau = \mu$ und zerlegen danach das System (2) in die beiden Reihen:

$$(4) \qquad \frac{y^2}{\beta - \lambda} + 2x + \lambda = 0, \quad -\infty < \lambda < \beta,$$

$$(5) \qquad \frac{y^2}{\beta - \mu} + 2x + \mu = 0, \quad \beta < \mu < +\infty,$$

von denen die erste alle linken, die zweite alle rechten Parabeln des Systems enthält. Lassen wir die Parameter λ und μ alle zulässigen Werte durchlaufen, so ändern sich die ihnen entsprechenden Parabeln in folgender Weise:

Durchläuft λ die Werte von $-\infty$ bis β, so bewegt sich der Scheitel der linken Parabel λ auf der x-Achse von rechts nach links gegen den Brennpunkt B_0 (vergl. Fig. 1). Gleichzeitig zieht sich die Parabel gegen das von B_0 nach links laufende Stück der x-Achse zusammen, welches selbst die letzte linke Parabel $\lambda = \beta$ darstellt. Das rechte Stück der x-Achse bildet die erste rechte Parabel $\mu = \beta$. Mit wachsendem μ löst sich die Parabel von der x-Achse ab, weitet sich mehr und mehr, während ihr Scheitel sich gleichzeitig nach links von dem Brennpunkt entfernt.

Wollen wir die durch einen gegebenen Punkt der Ebene gehenden Parabeln des konfokalen Systems (2) finden, so brauchen wir seine Koordinaten nur in die in τ quadratische Gleichung (2) oder:

$$(6) \qquad f(\tau) = y^2 + (\beta - \tau)\,(2x + \tau) = 0$$

einzusetzen und nach τ aufzulösen. Da $f(-\infty) = -\infty$; $f(\beta) = y^2 > 0$; $f(+\infty) = -\infty$, erhalten wir stets zwei reelle Wurzeln, von denen die eine größer als β, die andere kleiner als β ist, und die daher nach

den Gleichungen bei (4) und (5) mit λ und μ zu bezeichnen sind. Folglich gehen durch jeden Punkt eine rechte und eine linke Parabel hindurch.

Nach Potenzen von τ geordnet lautet (6):

$$\tau^2 - q\tau + r = 0, \tag{7}$$

wo die Koeffizienten q und r die Bedeutung haben:

$$q = \beta - 2x, \quad r = -(y^2 + 2\beta x).$$

Zwischen ihnen und den Wurzeln λ, μ der Gleichung bestehen die Beziehungen:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = q = \beta - 2x, \\ \lambda\mu = r = -(y^2 + 2\beta x). \end{cases} \tag{8}$$

Umgekehrt können wir auch die Punkte bestimmen, in denen zwei Parabeln des Systems sich schneiden. Aus der nach (6) identisch in τ geltenden Gleichung:

$$y^2 + (\beta - \tau)\,(2x + \tau) = -(\tau - \lambda)\,(\tau - \mu)$$

erhält man, indem man einmal die Koeffizienten von τ beiderseits gleichsetzt und einmal $\tau = \beta$ nimmt:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\beta - \lambda - \mu}{2}, \\ y^2 = -(\beta - \lambda)\,(\beta - \mu). \end{cases} \tag{9}$$

Also schneiden sich irgend zwei ungleichnamige Parabeln λ und μ stets in zwei symmetrisch gegen die x-Achse gelegenen reellen Punkten, während die Schnittpunkte von zwei gleichnamigen Parabeln nicht reell sind.

Wir nennen die Parameter λ, μ der durch einen Punkt gehenden Parabeln des Systems (2) die parabolischen Koordinaten des Punktes. Sie sind für jeden Punkt als Wurzeln der in τ quadratischen Gleichung (7) eindeutig bestimmt, während sie ihrerseits, je nachdem sie den Ungleichungen bei (4) und (5) genügen oder nicht, einen reellen oder imaginären

Punkt nach (9) zweideutig bestimmen. Nach dieser Definition stellen die Gleichungen (8) und (9) Beziehungen zwischen den gewöhnlichen und parabolischen Koordinaten dar.

Ausgezeichnete parabolische Koordinaten haben die Punkte der x-Achse. Für die Punkte links vom Brennpunkt ist $\lambda = \beta$, für die rechts $\mu = \beta$, für B_0 selbst ist $\lambda = \beta$, $\mu = \beta$.

Um auch das unendlich Weite in unsere Betrachtung einzuführen, setzen wir:

$$x = \frac{x}{t},\ y = \frac{y}{t},\ \tau = \frac{\tau_1}{\tau_2},\ \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},\ \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Dann geht die Gleichung (2) über in:

$$(2') \qquad \frac{y^2 \tau_2^2}{\beta \tau_2 - \tau_1} + 2xt\tau_2 + t^2\tau_1 = 0.$$

Aus ihr folgt, daß die Parabel $\tau_2 = 0$ des konfokalen Systems mit der doppelt zählenden unendlich fernen Geraden zusammenfällt. Die Gleichungen (7), (8) und 9 werden:

$$(7') \qquad p\tau_1^2 - q\tau_1\tau_2 + r\tau_2^2 = 0,$$

$$(8') \qquad \begin{cases} \lambda_2\mu_2 = kp = kt^2, \\ \lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2 = kq = k(\beta t^2 - 2xt), \\ \lambda_1\mu_1 = kr = k(-y^2 - 2\beta x t), \end{cases}$$

$$(9') \qquad \begin{cases} kt^2 = \lambda_2\mu_2, \\ kxt = \dfrac{\beta\lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2}{2}, \\ ky^2 = -(\beta\lambda_2 - \lambda_1)(\beta\mu_2 - \mu_1), \end{cases}$$

wo k ein Proportionalitätsfaktor ist.

Wird die Diskriminante der in $\tau_1 : \tau_2$ quadratischen Gleichung $(7') = 0$:

$$(10) \qquad \begin{cases} \Delta = (\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)^2 = k^2(q^2 - 4pr) \\ \quad = k^2t^2\big((\beta t - 2x)^2 + 4(y^2 + 2\beta xt)\big) = 0, \end{cases}$$

so werden die beiden Wurzeln der Gleichung $\lambda_1 : \lambda_2$ und $\mu_1 : \mu_2$ einander gleich. Folglich sind für jeden Punkt, dessen rechtwinklige Koordinaten der Gleichung (10) genügen, die parabolischen Koordinaten $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$ einander gleich. Die Gleichung (10) stellt zugleich die Enveloppe[5]) der Kurvenschar (1) dar. Ihre reellen Bestandteile sind die doppelt zählende unendlich ferne Gerade und der Brennpunkt des konfokalen Systems. Die parabolischen Koordinaten des Brennpunktes sind $\lambda = \beta$, $\mu = \beta$; alle Punkte der unendlich fernen Geraden haben dieselben, einander gleichen Koordinaten $\lambda_2 = 0$, $\mu_2 = 0$, wie aus der Gleichung (7′) mit $t = 0$ folgt.

§ 2.

Das Hauptachsenproblem des Tangentenpaares der Parabel.

Die Gleichungen der Tangenten in dem Punkte P (x, y) an die durch ihn gehenden Parabeln λ, μ des konfokalen Systems sind in den laufenden Koordinaten X, Y (vergl. Fig. 1):

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{yY}{\beta - \lambda} + X + x + \lambda = 0, \\ \dfrac{yY}{\beta - \mu} + X + x + \mu = 0. \end{cases}$$

Die Bedingung, daß beide auf einander senkrecht stehen, ist:

$$(2) \qquad \frac{y^2}{(\beta - \lambda)(\beta - \mu)} + 1 = 0.$$

---

[5]) Vergl. Staude, Analyt. Geometrie des Punktepaares usw. § 34, 9.

Nun muß der Punkt P(x, y) den beiden Gleichungen (4) und (5) des § 1 genügen, also auch der durch Subtraktion folgenden:

$$(3) \qquad (\lambda-\mu)\left\{\frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}+1\right\}=0.$$

Folglich ist die Bedingung (2) stets erfüllt. Jede Tangente ist demnach die Normale der anderen.

Ich kann jetzt die Normalen ξ, η als Achsen eines neuen rechtwinkligen Koordinatensystems mit dem Ursprung P (x, y) = (λ, μ) einführen. Da ξ und η die Richtungskosinus:

$$\alpha_1 = l,\ \beta_1 = \frac{l\,y}{\beta-\lambda},$$

$$\alpha_2 = m,\ \beta_2 = \frac{m\,y}{\beta-\mu},$$

$$\text{wo } l = \sqrt{\frac{\beta-\lambda}{\mu-\lambda}},\ m = \sqrt{\frac{\beta-\mu}{\lambda-\mu}},$$

haben, bestehen zwischen den alten Koordinaten X, Y und den neuen ξ, η die Beziehungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} X-x = l\xi + m\eta, \\ Y-y = y\left(\dfrac{l\xi}{\beta-\lambda}+\dfrac{m\eta}{\beta-\mu}\right). \end{cases}$$

Das vom Punkte P (x, y) an die Parabel:

$$(5) \qquad \frac{Y^2}{\beta-\tau}+2X+\tau=0$$

gelegte Tangentenpaar läßt sich durch die Gleichung:

$$(6) \qquad TR-S^2=0$$

darstellen, wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$T=\frac{y^2}{\beta-\tau}+2x+\tau,\ R=\frac{(Y-y)^2}{\beta-\tau},$$

$$S=\frac{y(Y-y)}{\beta-\tau}+X-x,$$

und X, Y die laufenden Koordinaten sind. Durch die Substitution (4) können wir (6) in ξ- und η-Koordinaten ausdrücken und erhalten mit Zuhülfenahme von mehreren identischen Gleichungen, die zwischen den gemeinen und parabolischen Koordinaten bestehen[1]), schließlich die Gleichung:

$$\frac{\xi^2}{\tau - \lambda} + \frac{\eta^2}{\tau - \mu} = 0. \tag{7}$$

Da (7) die Hauptachsengleichung des Tangentenpaares ist, hat dieses die Normalen ξ, η der durch den Punkt P gehenden Parabeln des konfokalen Systems als Hauptachsen.

Wenn wir den Winkel, den die Tangenten mit der ξ-Achse bilden, ω nennen, so ist:

$$\operatorname{tg}^2 \omega = \frac{\eta^2}{\xi^2} = -\frac{\tau - \mu}{\tau - \lambda}. \tag{8}$$

Folglich ist, wenn τ, λ, μ gegeben sind, auch ω durch (8) bestimmt. Sind umgekehrt τ und ω gegeben, und sollen die Punkte gesucht werden, in denen die an τ gelegten Tangenten mit der ξ-Achse den Winkel ω bilden, so folgt aus (8), daß ihre Koordinaten λ, μ der Bedingung:

$$\lambda \sin^2 \omega + \mu \cos^2 \omega - \tau = 0 \tag{9}$$

genügen müssen. Sollen die Tangenten mit der η-Achse den Winkel ω bilden, wird die Bedingung:

$$\lambda \cos^2 \omega + \mu \sin^2 \omega - \tau = 0. \tag{10}$$

Die Bedeutung dieser geometrischen Örter läßt sich auch in der Weise ausdrücken, daß für $\tau < \beta$ die Parabel τ von allen Punkten der durch (9) dargestellten Kurve unter dem Winkel 2ω, von der Kurve (10) aus unter dem Winkel $\pi - 2\omega$ erscheint. Ist $\tau > \beta$, kehrt

---

[1]) Vergl. Staude: Analyt. Geom. d. Punktepaares usw. § 35.

sich die Bedeutung von (9) und (10) um. (9) kommt jetzt der Winkel $\pi - 2\omega$, (10) der Winkel 2ω zu.

Bevor wir diese Gleichungen weiter untersuchen, wollen wir unsere Betrachtungen allgemeineren linearen Gleichungen zwischen parabolischen Koordinaten zuwenden.

§ 3.

Die Bedeutung der linearen Gleichung zwischen ebenen parabolischen Koordinaten.

Die betrachtete lineare Gleichung hat die Form:

(1) $$A\lambda_1\mu_2 + B\mu_1\lambda_2 + C\lambda_2\mu_2 = 0.$$

Um das geometrische Gebilde kennen zu lernen, das durch diese Gleichung dargestellt wird, müssen wir die laufenden parabolischen Koordinaten $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$ durch die homogenen rechtwinkligen Koordinaten $x : y : t$ ausdrücken. Da $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$ als Wurzeln der in τ quadratischen Gleichung (7′) des § 1 definiert sind, ist (1) in x, y, t irrational. Wollen wir eine in x, y, t rationale Gleichung erhalten, müssen wir die Gleichung (1) und die aus ihr durch Vertauschung von $\lambda_1 : \lambda_2$ und $\mu_1 : \mu_2$ entstehende Gleichung:

(2) $$A\mu_1\lambda_2 + B\lambda_1\mu_2 + C\lambda_2\mu_2 = 0$$

gemeinsam behandeln. Das Produkt ihrer linken Seiten ist als symmetrische Funktion von $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$, den Wurzeln einer quadratischen Gleichung, rational von den Koeffizienten p, q, r derselben und damit auch rational von x, y, t abhängig. Setzen wir es gleich 0, bekommen wir eine rationale Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten, welche nach dem Vorhergehenden mit den Gleichungen (1) und (2) äquivalent ist.

Die Ausführung der Multiplikation ergibt:

$$\lambda_2 \mu_2 \Big\{ (A^2 + B^2) \lambda_1 \mu_1 + A B \left(\frac{\lambda_1^2 \mu_2^2 + \mu_1^2 \lambda_2^2}{\lambda_2 \mu_2} \right) + C (A + B) (\lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2) + C^2 \lambda_2 \mu_2 \Big\}$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} = \lambda_2 \mu_2 \Big\{ (A - B)^2 \lambda_1 \mu_1 + AB \dfrac{(\lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2)^2}{\lambda_2 \mu_2} \\ + C (A + B) (\lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2) + C^2 \lambda_2 \mu_2 \Big\} = 0. \end{array} \right.$$

Mit Benutzung der Gleichungen (8′) des § 1 wird (3):

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} k^2 t^2 \{ - (A - B)^2 (y^2 + 2 \beta x t) + AB (\beta t - 2x)^2 \\ + C (A + B) (\beta t^2 - 2 x t) + C^2 t^2 \} = 0. \end{array} \right.$$

Da (4) die Gleichung einer in die doppelt zählende unendlich ferne Gerade und einen Kegelschnitt zerfallenden Kurve 4. Ordnung ist, erhalten wir den Satz:

Die beiden Gleichungen:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \lambda_1 \mu_2 + B \mu_1 \lambda_2 + C \lambda_2 \mu_2 = 0 \\ A \mu_1 \lambda_2 + B \lambda_1 \mu_2 + C \lambda_2 \mu_2 = 0 \end{array} \right.$$

stellen eine Kurve 4. Ordnung dar, welche in die doppelt zählende unendlich ferne Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt.

Alle durch (5) dargestellten Kurven haben also das gemeinsame Merkmal, daß sie die unendlich ferne Gerade doppelt zählend in sich enthalten. Dieses Verhalten kommt dadurch zustande, daß jede der beiden Gleichungen (5) durch die allen Punkten der unendlich fernen Geraden gemeinsamen Koordinaten $\lambda_2 = 0$, $\mu_2 = 0$ erfüllt wird. Folglich wird durch Zulassung von unendlich großen Werten λ, μ nur bewirkt, daß zu der durch die Gleichung zwischen endlichen parabolischen Koordinaten dargestellten Kurve die

unendlich ferne Gerade hinzukommt. Wir wollen uns daher für die weiteren Untersuchungen auf endliche Werte beschränken und ersetzen dementsprechend $\lambda_1:\lambda_2$, $\mu_1:\mu_2$, x:y:t durch λ, μ, x, y. Die Gleichungen (5) und (4) gehen dann in:

$$(5') \qquad \begin{cases} A\lambda + B\mu + C = 0 \\ A\mu + B\lambda + C = 0 \end{cases}$$

und:

$$(4') \qquad \begin{cases} 4ABx^2 - (A-B)^2y^2 - [\beta(A^2+B^2) \\ \quad + C(A+B)]\,2x + AB\beta^2 \\ \quad + C(A+B)\beta + C^2 = 0 \end{cases}$$

über. Nun kommt y in (4') nur in der zweiten Potenz vor. Folglich stellen die Gleichungen (5') einen Kegelschnitt dar, der symmetrisch gegen die x-Achse liegt.

Da die Determinante von (4'):

$$\Delta = (A-B)^4\,\{\beta(A+B)+C\}^2$$

ist, zerfällt der Kegelschnitt für $A = B$ und $\beta(A+B) + C = 0$.

Ist $\Delta \neq 0$, so werden, da $\Delta_{33} = -4AB(A-B)^2$, die eigentlichen Kegelschnitte:

Hyperbeln, wenn A und B gleiches Vorzeichen haben,
Parabeln, wenn $A = 0$ oder $B = 0$,
Ellipsen, wenn A und B verschiedenes Vorzeichen haben.

§ 4.

Realität der Zweige des Kegelschnittes:

$$(1) \qquad \begin{cases} A\lambda + B\mu + C = 0 & \text{(1. Zweig)} \\ A\mu + B\lambda + C = 0 & \text{(2. Zweig).} \end{cases}$$

Wir führen in unsere Betrachtungen eine Hilfsebene ein, in der wir λ, μ als Kartesische Koordinaten deuten (vergl. Fig. 2). Auf diese Ebene wollen wir die xy-Ebene in der Weise abbilden, daß jedem Punkte der xy-Ebene mit den parabolischen Koordinaten λ, μ in der $\lambda\mu$-Ebene der Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten λ, μ entsprechen soll und umgekehrt. Da in der xy-Ebene stets λ und μ der Ungleichung:

(2) $$-\infty < \lambda \leqq \beta \leqq \mu < +\infty$$

genügen, wird die ganze xy-Ebene auf das in der Figur 2 durch die Linien a und b begrenzte Gebiet E abgebildet. Umgekehrt entsprechen nur den Punkten der $\lambda\mu$-Ebene, die in dem Gebiete E liegen, reelle Bildpunkte der xy-Ebene, und zwar je zwei symmetrisch zur x-Achse gelegene. Im Besonderen werden die Kanten a durch das Stück der x-Achse links von $B_0 (\lambda = \beta)$, b durch den übrigen Teil der x-Achse $(\mu = \beta)$ wiedergegeben.

Dem Eckpunkte J entspricht der Brennpunkt $B_0 (\lambda = \beta, \ \mu = \beta)$.

Um das Bild des Kegelschnittes (1) in der $\lambda\mu$-Ebene zu erhalten, müssen wir λ und μ als rechtwinklige Koordinaten betrachten. Die Gleichungen (1) stellen dann in der $\lambda\mu$-Ebene zwei Geraden dar. Auf ihnen liegen alle Punkte λ, μ, deren Koordinaten den Gleichungen (1) genügen, also auch die, deren Koordinaten, als parabolische Koordinaten aufgefaßt, kein reeller Punkt der xy-Ebene zukommt. Dem reellen Kegelschnitt in der xy-Ebene entsprechen als Bild nur die in das Gebiet E fallenden Teile der Geraden. Auf jeder Geraden reihen sich die Punkte λ, μ stetig aneinander; folglich müssen auch ihre Bildpunkte in den beiden Halbebenen der xy-Ebene zusammenhängende Kurven bilden, die auf der x-Achse sich

vereinigen müssen, da jede Gerade, falls sie das Gebiet E überhaupt berührt, eine der beiden Kanten a, b schneidet. Jede der Gleichungen (1) stellt also einen bestimmten zusammenhängenden Teil des Kegelschnittes dar; wir wollen sie deshalb als den 1. und 2. Zweig des Kegelschnittes bezeichnen.

Wann sind die Zweige reell? wenn die ihnen in der $\lambda\mu$-Ebene entsprechenden Geraden das Gebiet E schneiden. Dies ist der Fall, wenn sie eine der beiden Strecken a, b schneiden. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. A und B haben gleiche Vorzeichen.

Wir multiplizieren die Gleichungen (1) mit ± 1, damit $A > 0$, $B > 0$ wird.

Die 1. Gerade schneidet

a, wenn $(A + B)\beta + C = F \geqq 0$,

b, „ $F \leqq 0$.

Dasselbe gilt von der 2. Geraden. Beide Zweige sind stets reell. Für $F = 0$ gehen sie durch den Brennpunkt B_0.

2. A und B haben verschiedene Vorzeichen.

Wir multiplizieren die Gleichungen (1) mit $+1$, damit $A > 0$ wird.

Die 1. Gerade schneidet

a, wenn $F \geqq 0$,

b, „ $F \geqq 0$.

Der 1. Zweig ist nur reell, wenn $F \geqq 0$.

Die 2. Gerade schneidet

a, wenn $F \leqq 0$,

b, „ $F \leqq 0$.

Der 2. Zweig ist reell, wenn $F \leqq 0$. Die beiden Zweige können nicht gleichzeitig reell sein; wenn der

eine reell ist, ist der andere imaginär. Nur wenn $F = 0$, reduzieren sich beide auf den Brennpunkt B_0.

3. $A = 0$ oder $B = 0$.

Die Gleichungen (1) erhalten die Form:

$$\lambda = c \quad (1. \text{ Zweig})$$
$$\mu = c \quad (2. \text{ Zweig}).$$

Der 1. Zweig ist reell, wenn

$$-\infty < c \leqq \beta.$$

Der 2. Zweig ist reell, wenn

$$\beta \leqq c < +\infty.$$

Die Realität des einen Zweiges schließt die des anderen aus; nur wenn $c = \beta$, wird der 1. Zweig zur linken Grenzparabel $\lambda = \beta$, der 2. Zweig zur rechten $\mu = \beta$.

Im Falle 1, wo der Kegelschnitt eine Hyperbel ist, sind die beiden Zweige identisch mit den beiden Hyperbelzweigen. In den beiden anderen Fällen, wo der Kegelschnitt eine Ellipse beziehungsweise Parabel ist, ist der ganze Kegelschnitt mit dem einen Zweige identisch, während der andere imaginär ist.

Um die beiden Schnittpunkte des Kegelschnittes (1) mit der x-Achse zu erhalten, müssen wir die Schnitte seiner Zweige mit derselben bestimmen. Da die x-Achse in die beiden Stücke $\lambda = \beta$ und $\mu = \beta$ zerfällt, setzen wir zunächst in beiden Gleichungen $\lambda = \beta$ und berechnen die Werte der zugehörigen μ; dann wiederholen wir dasselbe Verfahren für $\mu = \beta$. Man erhält so vier Wertepaare (λ, μ), von denen jedoch nur zweien je ein reeller Punkt entspricht. Zu demselben Resultat kommt man, wenn man in beiden Gleichungen eine Koordinate, etwa $\mu = \beta$ setzt und die andere als laufende parabolische Koordinate der x-Achse auf-

faßt, indem man sie mit der gewöhnlichen Koordinate der x-Achse in die Beziehung setzt: $x = -\lambda/_2$. Man erhält dann die Schnittpunkte:

$$A\lambda_1 + B\beta + C = 0,$$
$$A\beta + B\lambda_2 + C = 0,$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten:

$$x_1 = \frac{B\beta + C}{2A}, \quad x_2 = \frac{A\beta + C}{2B}.$$

§ 5.

Weitere Untersuchungen des Kegelschnittes:

$$(1) \qquad \begin{cases} A\lambda + B\mu + C = 0 & \text{(1. Zweig)} \\ A\mu + B\lambda + C = 0 & \text{(2. Zweig).} \end{cases}$$

Wir setzen:

$$(2) \qquad \begin{cases} A = \varepsilon_1 |A|, \; B = \varepsilon_2 |B|, \\ |A| = \varrho \sin^2 \omega, \; |B| = \varrho \cos^2 \omega, \; C = -\varepsilon_1 \varrho \tau. \end{cases}$$

Dabei sind $|A|$ und $|B|$ die absoluten Werte von A und B, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$, je nachdem A bez. B positiv oder negativ, $\varrho = |A| + |B|$.

Wir können den Gleichungen (1) dann auch folgende Gestalt geben:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 \sin^2 \omega \lambda + \varepsilon_2 \cos^2 \omega \mu - \varepsilon_1 \tau = 0 & \text{(1. Zweig)} \\ \varepsilon_1 \sin^2 \omega \mu + \varepsilon_2 \cos^2 \omega \lambda - \varepsilon_1 \tau = 0 & \text{(2. Zweig).} \end{cases}$$

Diese Form gibt uns die Möglichkeit, über die Gestalt des Kegelschnittes und seine Bedeutung als geometrischen Ort nähere Aussagen zu machen.

Von den 4 möglichen Fällen:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1; \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1;$$
$$\varepsilon_1 = +1, \; \varepsilon_2 = -1; \quad \varepsilon_1 = -1, \; \varepsilon_2 = +1,$$

brauchen wir nur die beiden linken zu betrachten, da die Gleichungen (3) durch Multiplikation mit ε_1 stets auf sie zurückgeführt werden können.

Erster Fall: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1$.

Die Gleichungen (3) lauten:

$$(4) \quad \begin{cases} \sin^2\omega\lambda + \cos^2\omega\mu - \tau = 0 & \text{(1. Zweig)} \\ \sin^2\omega\mu + \cos^2\omega\lambda - \tau = 0 & \text{(2. Zweig).} \end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen für alle Werte ω und τ Hyperbeln dar. Sie sind identisch mit den Gleichungen (9) und (10) des § 2, die wir als Bedingungsgleichungen für die Punkte erhielten, von denen aus gesehen die Parabel τ unter dem Winkel 2ω oder $\pi - 2\omega$ erscheint. Folglich sind die in § 2 gesuchten geometrischen Örter die beiden Zweige der Hyperbel (4). Hieraus sehen wir, daß die beiden Örter in rechtwinkligen Koordinaten sich nicht von einander trennen lassen.

Um weitere Eigenschaften der Hyperbel (4) kennen zu lernen, wollen wir ihre Hauptachsengleichung aufstellen. In den alten Koordinaten lautet ihre Gleichung, wie aus § 3 (4′) mit Benutzung der Formeln (2) des § 5 und der Bedingung $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1$ folgt:

$$(4') \quad \begin{cases} \sin^2 2\omega\, x^2 - \cos^2 2\omega\, y^2 - \left\{(\beta - \tau) - \frac{\beta}{2}\sin^2 2\omega\right\} 2x \\ \qquad + \sin^2 2\omega \frac{\beta^2}{4} - \tau(\beta - \tau) = 0. \end{cases}$$

Aus ihr erhalten wir für den Mittelpunkt der Hyperbel die Koordinaten:

$$(5) \qquad x_0 = -\frac{\beta}{2} + \frac{\beta - \tau}{\sin^2 2\omega}, \quad y_0 = 0.$$

Wir nehmen jetzt den Mittelpunkt (x_0, y_0) als Ursprung eines neuen Koordinatensystems, dessen

Achsen der x- und y-Achse parallel laufen. Die neuen Koordinaten x', y' sind dann mit den alten x, y durch die Formeln:

$$x = x_0 + x', \quad y = y' \tag{6}$$

verbunden. Die Gleichung (4′) wird in den neuen Koordinaten:

$$\frac{\sin^4 2\omega}{\cos^2 2\omega\,(\beta-\tau)^2}x'^2 - \frac{\sin^2 2\omega}{(\beta-\tau)^2}y'^2 - 1 = 0. \tag{7}$$

Welche Koordinaten haben die Brennpunkte der Hyperbel?

$$x'_1, x'_2 = \pm e = \pm\sqrt{a^2+b^2} = \pm\frac{\beta-\tau}{\sin^2 2\omega}; \quad y'_1 = y'_2 = 0,$$

im alten Koordinatensystem:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + x'_1 = -\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{2(\beta-\tau)}{\sin^2 2\omega}, & y_1 = 0; \\ x_2 = x_0 + x'_2 = -\dfrac{\beta}{2}, & y_2 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Welche Gleichungen haben die beiden Direktricen?

$$x' = x'_1, \; x'_2 = \pm\frac{a^2}{e} = \pm\frac{\cos^2 2\omega}{\sin^2 2\omega}(\beta-\tau),$$

im alten Koordinatensystem:

$$\begin{cases} x = x_1 = x_0 + x'_1 = -\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{(\beta-\tau)(1+\cos^2 2\omega)}{\sin^2 2\omega}, \\ x = x_2 = x_0 + x'_2 = \dfrac{\beta}{2} - \tau. \end{cases} \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt der Satz:

Die Hyperbel hat einen Brennpunkt mit dem konfokalen System, die zugehörige Direktrix mit der Parabel τ gemeinsam.

Wegen ihrer Beziehung zu der Parabel τ muß die Hyperbel stets außerhalb derselben liegen, und zwar liegen die Zweige immer so, daß derjenige, von

welchem τ unter dem größeren der Winkel 2ω, $\pi - 2\omega$ gesehen wird, der Parabel zunächst liegt (vergl. Fig. 3). Ihm kommt auch der Brennpunkt B_0 und die Direktrix der Parabel τ als Brennpunkt bezw. Direktrix zu.

Ist die Parabel τ durch die Brennpunktsgleichung:

(10) $$y^2 + 2px - p^2 = 0$$

gegeben, so hat die Polare des Punktes $P'(x', y')$ die Gleichung:

(11) $$yy' + px' = p(p - x).$$

Sie schneidet die Parabel in den Punkten $Q_1(x_1, y_1)$ und $Q_2(x_2, y_2)$. Der senkrechte Abstand des Punktes $Q_1(x_1, y_1)$ von der Direktrix D ist (vergl. Fig. 3):

$$R = p - x_1 .$$

Es sei $r' = \overline{B_0 P'}$, $r_1 = \overline{B_0 Q_1}$, $r_2 = \overline{B_0 Q_2}$.

Dann gilt für den Winkel φ', den r' und r_1 mit einander bilden:

$$\cos\varphi' = \frac{x_1 x' + y_1 y'}{r' R} = \frac{y_1 y' + p x' - (p - x_1) x'}{r' R}$$

$$= \frac{p(p - x_1) - (p - x_1) x'}{r' R} = \frac{p - x'}{r'}.$$

Da φ' von den Koordinaten des Punktes $Q_1(x_1, y_1)$ unabhängig ist, müssen wir auch für den Winkel, den r_2 mit r' bildet, denselben Wert φ' erhalten. Folglich werden die beiden von einem beliebigen Punkte an die Kurve gelegten Tangenten vom Brennpunkte B_0 aus unter gleichem Winkel gesehen.

Benutzen wir weiter die Eigenschaft, daß R und r_1 mit $\overline{P' Q_1}$ gleiche Winkel bilden, so ergibt sich:

$$\varphi' = \pi - \sphericalangle Q_1 P' Q_2.$$

In der Fig. 3 soll P' auf dem Hyperbelzweige liegen, von dem aus τ unter dem Winkel $\pi - 2\omega$ erscheint. Dann wird $\varphi' = 2\omega$. Die Gerade $\overline{B_0 P'}$

schneidet den anderen Hyperbelzweig in P. Der diesem Punkte zukommende Winkel φ wird entsprechend $\varphi = \pi - 2\omega$.

Hieraus folgt der Satz:

Sind P und P′ zwei solche Punkte der Hyperbel (4), deren Verbindungslinie durch den Brennpunkt B_0 geht, so liegen die 4 Berührungspunkte der von ihnen an die Parabel τ gezogenen Tangenten auf zwei sich im Brennpunkte B_0 schneidenden Geraden.

Hält man in den Gleichungen (4) den Parameter τ fest und läßt ω alle Werte von 0 bis $\pi/2$ durchlaufen, so ändert sich die Gestalt und die Lage der Hyperbel in folgender Weise:

Ist $\tau < \beta$, wie in der Fig. 3 angenommen ist, so fällt für $\omega = 0$ der 2. Zweig mit der Parabel τ zusammen, während der 1. imaginär ist. Mit wachsendem ω löst sich der 2. Zweig von der Parabel ab, und der 1. tritt aus dem Unendlichen als rechter Hyperbelzweig hervor. Beide eilen einander entgegen, indem sie sich gleichzeitig mehr und mehr in die Länge strecken. Mit $\omega = \pi/4$ (dem entspricht in der allgemeinen Gleichung (1) der Fall $A = B$) arten sie zu Geraden aus und fallen beide in die Direktrix der Parabel τ hinein.

Also ist die Direktrix der Ort der Scheitel aller rechtwinkligen Tangentenpaare an die Parabel.

Wächst ω weiter, lösen sich die beiden Zweige von der Direktrix ab; der 1. wird linker Hyperbelzweig und nähert sich der Parabel, während der 2. als rechter Zweig nach rechts sich entfernt. Mit $\omega = \pi/2$ fällt der 1. mit τ zusammen, der 2. verschwindet im Unendlichen.

Ist $\tau > \beta$, so gelten dieselben Ausführungen wie für die linke Parabel, nur mit der Modifikation, daß der 1. und 2. Zweig und die Bezeichnungen „links“ und „rechts“ mit einander vertauscht werden.

Für den Grenzfall $\tau = \beta$, (der in der Gleichung (1) durch die Bedingung $(A + B)\ \beta + C = 0$ ausgedrückt ist), zerfällt die Hyperbel in ein Linienpaar, dessen Doppelpunkt B_0, dessen Hauptachsengleichung:

$$\sin^2 2\omega\, x'^2 - \cos^2 2\omega\, y'^2 = 0 \tag{12}$$

ist.

Je nachdem wir $\tau = \beta$ als linke oder rechte Parabel auffassen, fällt sie mit dem Stück der x-Achse zusammen, das links oder rechts von B_0 liegt. Die Tangenten, die von einem beliebigen Punkte aus an sie gelegt werden, sind die Verbindungslinien dieses Punktes mit B_0 und dem unendlich fernen Punkte der x-Achse.

Das Linienpaar (12) ist daher der Ort der Scheitel aller Winkel 2ω und $\pi - 2\omega$, deren Schenkel durch den Brennpunkt und den unendlich fernen Punkt der x-Achse gehen. Also haben wir es hier mit einem Spezialfalle des bekannten Satzes zu tun, welcher aussagt, daß der geometrische Ort der Scheitel aller Winkel 2ω und $\pi - 2\omega$, deren Schenkel durch zwei gegebene Punkte gehen sollen, zwei kongruente durch die beiden Punkte gehende Kreise sind, von denen der eine das Spiegelbild des andern in bezug auf die Verbindungslinie der beiden Punkte ist. Wir haben in der Fig. 4 den Brennpunkt B_0 als den einen der beiden Punkte angenommen. Die Tangenten g und g' der beiden Kreise im Punkte B_0 bilden mit der positiven x-Achse den Winkel 2ω; sie sind also unabhängig von den Koordinaten des anderen Punktes P. Lasse ich 2ω konstant und verändere P, so verändern sich

auch die Kreise, während die Tangenten in B_0, wenn P nur auf der x-Achse bleibt, dieselben bleiben. Je weiter P sich auf der x-Achse entfernt, desto größer werden die Kreise. Sie schmiegen sich immer mehr den Tangenten g, g′ an, bis sie schließlich, wenn P im Unendlichen verschwindet, mit ihnen zusammenfallen.

Da (12) auch die Hauptachsengleichung der Asymptoten der Hyperbel (4) ist, so folgt, weil τ in der Gleichung nicht vorkommt, daß die Gleichungen (4) bei festem ω und laufendem Parameter τ ein System ähnlicher Hyperbeln darstellen.

Jeder Parabel τ des konfokalen Systems ist für einen bestimmten Wert ω eine bestimmte Hyperbel zugeordnet. Dieses Verhältnis muß auch bestehen bleiben, wenn die Parabel τ unabhängig vom konfokalen System durch die Gleichung:

$$\frac{y^2}{p} + 2(x+q) = 0 \tag{13}$$

gegeben ist. Da die Gleichungen § 1 (2) und (13) dieselbe Parabel darstellen, so bestehen die Beziehungen:

$$p = \beta - \tau, \quad q = \frac{\tau}{2}. \tag{14}$$

Mit ihrer Hülfe können wir in der Gleichung (4′) β und τ durch p und q ausdrücken. (4′) geht dann in:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin^4 2\omega}{p^2 \cos^2 2\omega}\left(x + \dfrac{p}{2} + q - \dfrac{p}{\sin^2 2\omega}\right)^2 \\ \qquad - \dfrac{\sin^2 2\omega}{p^2} y^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

über. Folglich ist die Hyperbel (15) der Ort aller Punkte, von denen aus die Parabel (13) unter dem Winkel 2ω oder $\pi - 2\omega$ erscheint.

Zweiter Fall $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$:

Die Gleichungen (3) erhalten die Form:

$$(16)\quad \begin{cases} \sin^2\omega\,\lambda - \cos^2\omega\,\mu - \tau = 0 & \text{(1. Zweig)} \\ \sin^2\omega\,\mu - \cos^2\omega\,\lambda - \tau = 0 & \text{(2. Zweig).} \end{cases}$$

Sie stellen für alle Werte τ und ω Ellipsen dar. Die Bedingungen der Realität der beiden Zweige sind bezüglich:

$$(17)\quad \tau \leqq -\beta\cos 2\omega,\ \tau \geqq -\beta\cos 2\omega.$$

Die Ellipse (16) hat den Mittelpunkt:

$$(18)\quad x_0 = \beta/_2 - \frac{\tau\cos 2\omega + \beta}{\sin^2 2\omega},\ y_0 = 0.$$

Ihre Hauptachsengleichung lautet:

$$(19)\quad \frac{\sin^4 2\omega}{(\tau+\beta\cos 2\omega)^2}x'^2 + \frac{\sin^2 2\omega}{(\tau+\beta\cos 2\omega)^2}y'^2 - 1 = 0.$$

Die Brennpunkte haben die Koordinaten:

$$x'_1, x'_2 = \pm\frac{(\tau+\beta\cos 2\omega)\cos 2\omega}{\sin^2 2\omega},\ y'_1 = y'_2 = 0,$$

im alten Koordinatensystem:

$$(20)\quad \begin{cases} x_1 = x_0 + x'_1 = -\beta/_2,\ y_1 = 0; \\ x_2 = x_0 + x'_2 = {}^3/_2\beta - \dfrac{2(\tau\cos 2\omega+\beta)}{\sin^2 2\omega},\ y_2 = 0. \end{cases}$$

Alle Ellipsen (16) haben einen Brennpunkt mit dem konfokalen System gemeinsam. Andere Eigenschaften, wie sie den Hyperbeln (4) zukommen, fehlen ihnen.

Hält man τ fest und läßt ω alle Werte von 0 bis $\pi/_2$ durchlaufen, so ändert sich die Ellipse (16) in folgender Weise:

Sie beginnt für $\omega = 0$ mit der Parabel $(-\tau)$ des konfokalen Systems, zieht sich anfangs mit wachsendem

ω zu immer kleineren Ellipsen zusammen, um dann wieder sich auszudehnen und schließlich für $\omega = \pi/2$ in die Parabel τ überzugehen. Ist $-\beta \leqq \tau \leqq +\beta$, zieht sie sich für $\beta \cos 2\omega + \tau = 0$ (der Bedingung entspricht in den allgemeinen Koeffizienten der Gleichung (1) $(A+B)\beta + C = 0$) auf den Brennpunkt B_0 zusammen. Ist $\tau < -\beta$ oder $\tau > +\beta$, so kann niemals $\cos 2\omega = -\tau/\beta$ werden, folglich können sich auch die Ellipsen nicht auf B_0 zusammenziehen. Für alle Werte τ geht die Ellipse, wenn $\omega = \pi/4$ (dem entspricht $A+B=0$), in einen Kreis über mit dem Brennpunkt B_0 als Mittelpunkt und τ als Radius.

Nehmen wir ω fest an und lassen τ variieren, so erhalten wir folgendes Resultat:

1. Stufe $+\infty > \tau > -\beta \cos 2\omega$: Der 1. Zweig ist imaginär, der 2. Zweig zieht sich aus dem unendlich großen Kreise zu immer kleineren Ellipsen mit dem gemeinsamen rechten Brennpunkte B_0 zusammen. Grenzfall $\tau = -\beta \cos 2\omega$: Der 2. Zweig verschwindet in B_0, der 1. erscheint als Punkt in B_0. 2. Stufe $-\beta \cos 2\omega > \tau > -\infty$: Während der 2. Zweig imaginär ist, wächst der 1. aus B_0 zu einer Ellipse hervor, deren linker Brennpunkt B_0 ist. Die Ellipse dehnt sich immer mehr aus und strebt allmählich dem unendlich großen Kreise zu.

Wir haben somit durch Veränderung von τ und ω die verschiedenen Arten der Kegelschnitte (4) und (16) und damit auch der Kegelschnitte (1) kennen gelernt. Alle diese Kegelschnitte haben das gemeinsame Merkmal, daß der eine ihrer Brennpunkte mit B_0 zusammenfällt.

Wir wollen nun noch im folgenden Paragraphen eine kurze Zusammenfassung der verschiedenen Arten der Kegelschnitte unter Zugrundelegung der allgemeinen Gleichung (1) geben.

§ 6.

Übersicht über die Arten der Kegelschnitte:

(1) $$\begin{cases} A\lambda + B\mu + C = 0 \\ A\mu + B\lambda + C = 0. \end{cases}$$

1. A und B haben gleiches Vorzeichen.

a) $(A - B)\,[\beta(A + B) + C] \neq 0$,
(1) ist eine eigentliche Hyperbel.

b) $A = B$,
(1) wird die Doppelgerade: $x = \frac{\beta}{2} + \frac{C}{2A}$.

c) $\beta(A + B) + C = 0$,
(1) zerfällt in ein Linienpaar, dessen Doppelpunkt B_0 ist.

2. A = 0 oder B = 0.

(1) wird eine Parabel des konfokalen Systems.

3. A und B haben verschiedenes Vorzeichen.

a) $[\beta(A + B) + C] \neq 0, A + B \neq 0$,
(1) ist eine eigentliche Ellipse.

b) $A + B = 0$,
(1) ist ein Kreis mit B_0 als Mittelpunkt und $r = \left|\frac{C}{2A}\right|$ als Radius.

c) $\beta(A + B) + C = 0$,
(1) wird ein Nullkreis in B_0.

II. Abschnitt.

Lineare Gleichungen zwischen parabolischen Koordinaten im Raume.

§ 7.

Das System konfokaler Paraboloide.

Die Gleichung:

$$(\beta v^2 + \gamma w^2 + 2us) - \tau(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

stellt eine Schar von Flächen 2. Klasse dar, von deren beiden Grundflächen:

$$\beta v^2 + \gamma w^2 + 2us = 0, \tag{2}$$

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0 \tag{3}$$

(3) der imaginäre Kugelkreis ist.

Die gemeinsamen Tangentialebenen der Schar sind außer der unendlich fernen Ebene sämtlich imaginär. Die vier Kegelschnitte der Schar haben die Parameter $\tau = \infty, \infty, \beta, \gamma$. $\tau = \infty$ entspricht doppelt zählend der imaginäre Kugelkreis, den Werten $\tau = \beta, \gamma$ die Kegelschnitte:

$$\begin{cases} (\gamma - \beta) w^2 + 2us - \beta u^2 = 0, \\ (\beta - \gamma) v^2 + 2us - \gamma u^2 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

In Punktkoordinaten lautet die Gleichung (1):

$$\frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} + 2x + \tau = 0, \tag{5}$$

wobei $\beta > \gamma$ sein soll. (5) stellt bei festem β, γ und veränderlichem τ

$$-\infty < \tau < +\infty$$

ein System konfokaler Paraboloide dar. Der gemeinsame linke und rechte Hauptbrennpunkt aller Paraboloide (5) ist (vergl. Fig. 5):

$$B_0 = -\frac{\beta}{2},\ 0,\ 0;\ C_0 = -\frac{\gamma}{2},\ 0,\ 0. \tag{6}$$

Die gemeinsame linke und rechte Fokalparabel ist:

$$\frac{y^2}{\beta-\gamma}+2x+\gamma=0, \tag{7}$$

$$\frac{z^2}{\beta-\gamma}-2x-\beta=0. \tag{8}$$

(7) und (8) sind die Gleichungen der Kegelschnitte (4) in Punktkoordinaten. Der Scheitelpunkt des einzelnen Paraboloids τ ist:

$$A_0=-\frac{\tau}{2},\ 0,\ 0.$$

Die Paraboloide (5) sind, je nachdem $-\infty<\tau<\gamma$ oder $\gamma<\tau<\beta$ oder $\beta<\tau<+\infty$, linke elliptische oder hyperbolische oder rechte elliptische. Wir nennen ihre Parameter beziehungsweise $\tau=\lambda$, $\tau=\mu$, $\tau=\nu$. Das System (5) zerfällt dann in die drei Reihen:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{\beta-\lambda}+\dfrac{z^2}{\gamma-\lambda}+2x+\lambda=0, & -\infty<\lambda<\gamma, \\ \dfrac{y^2}{\beta-\mu}+\dfrac{z^2}{\gamma-\mu}+2x+\mu=0, & \gamma<\mu<\beta, \\ \dfrac{y^2}{\beta-\nu}+\dfrac{z^2}{\gamma-\nu}+2x+\nu=0, & \beta<\nu<+\infty. \end{cases}$$

Die 1. Reihe enthält alle linken elliptischen, die 2. alle hyperbolischen, die 3. alle rechten elliptischen Paraboloide des Systems (5).

Lassen wir die Paramenter λ, μ, ν alle Werte ihrer Bereiche durchlaufen, so ändern sich die zugehörigen Paraboloide in folgender Weise:

Durchläuft λ die Werte von $-\infty$ bis γ, so bewegt sich der Scheitel des linken elliptischen Paraboloids auf der x-Achse von rechts nach links gegen den Brennpunkt C_0. Gleichzeitig zieht sich das Paraboloid immer mehr gegen die linke Fokalparabel zusammen,

bis es für $\lambda = \gamma$ in das Innere dieser Parabel in der Ebene $z = 0$ zusammenklappt. Mit $\mu = \gamma$, dem außerhalb der Fokalparabel gelegenen Gebiete der Ebene $z = 0$, beginnen die hyperbolischen Paraboloide. Sie heben sich, während μ die Werte von γ bis β durchläuft, aus der Ebene heraus und ziehen sich gegen die rechte Fokalparabel (8) zusammen, um für $\mu = \beta$ in das Äußere dieser Parabel zusammenzuklappen. Das Innere der Parabel wird von dem rechten elliptischen Paraboloid $\nu = \beta$ eingenommen, das sich bei wachsendem ν aus der Ebene heraushebt und weiter und weiter ausdehnt, während gleichzeitig sein Scheitel sich von B_0 nach links bewegt.

Setze ich in den Gleichungen (5) $z = 0$, beziehungsweise $y = 0$, erhalte ich als Hauptschnitte der Paraboloide:

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{\beta - \tau} + 2x + \tau = 0, \\ \dfrac{z^2}{\gamma - \tau} + 2x + \tau = 0. \end{cases}$$

Folglich schneiden die Paraboloide (5) jede der beiden Hauptebenen in einem System von konfokalen Parabeln (11) mit den Brennpunkten $x = -\beta/_2$, $y = 0$, $z = 0$, beziehungsweise $x = -\gamma/_2$, $y = 0$, $z = 0$.

Wollen wir die durch einen gegebenen Punkt P (x, y, z) des Raumes gehenden Paraboloide des konfokalen Systems bestimmen, so brauchen wir seine Koordinaten nur in die in τ kubische Gleichung (5) oder:

$$(12) \qquad \begin{aligned} f(\tau) = (\gamma - \tau)\, y^2 + (\beta - \tau)\, z^2 \\ + (\beta - \tau)\ (\gamma - \tau)\ (2x + \tau) = 0 \end{aligned}$$

einzusetzen und nach τ aufzulösen. Da

$$f(-\infty) = -\infty,\ f(\gamma) = (\beta - \gamma)\, z^2 > 0,$$
$$f(\beta) = -(\beta - \gamma)\, y^2 < 0,\ f(+\infty) = +\infty,$$

hat die Gleichung (12) für reelle Punkte des Raumes stets drei reelle Wurzeln, die zwischen den Grenzen:

$$-\infty < \tau_1 < \gamma,\ \gamma < \tau_2 < \beta,\ \beta < \tau_3 < +\infty$$

liegen. Wir können daher in Übereinstimmung mit (10) die Wurzeln mit λ, μ, ν bezeichnen.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen demnach stets drei Paraboloide des konfokalen Systems, je ein linkes elliptisches, ein hyperbolisches und ein rechtes elliptisches.

Nach Potenzen von τ geordnet lautet die Gleichung (12):

$$\tau^3 - q\,\tau^2 + r\,\tau - s = 0, \tag{13}$$

wo die Koeffizienten die Bedeutung haben:

$$q = \beta + \gamma - 2x,$$
$$r = \beta\gamma - 2x(\beta + \gamma) - z^2 - y^2,$$
$$s = -(\gamma y^2 + \beta z^2 + 2\beta\gamma x).$$

Zwischen ihnen und den Wurzeln λ, μ, ν der Gleichung (13) müssen folgende Beziehungen bestehen:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = q = \beta + \gamma - 2x, \\ \lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda = r = \beta\gamma - 2x(\beta + \gamma) - z^2 - y^2, \\ \lambda\mu\nu = s = -(\gamma y^2 + \beta z^2 + 2\beta\gamma x). \end{cases} \tag{14}$$

Umgekehrt können wir auch die Punkte bestimmen, in denen 3 Paraboloide λ, μ, ν sich schneiden. Es besteht zwischen den Koordinaten x, y, z eines Punktes und den Parametern λ, μ, ν der durch ihn gehenden Paraboloide nach (12) die in τ identische Gleichung:

$$(\gamma - \tau)\, y^2 + (\beta - \tau)\ z^2 + (\beta - \tau)\ (\gamma - \tau)\ (2x + \tau)$$
$$= (\tau - \lambda)\ (\tau - \mu)\ (\tau - \nu).$$

Aus ihr erhalten wir durch Vergleichung der Koeffizienten von τ und mit $\tau = \beta$ und $\tau = \gamma$:

$$(15)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\beta+\gamma-\lambda-\mu-\nu}{2}, \\ y^2 = -\dfrac{(\beta-\lambda)\ (\beta-\mu)\ (\beta-\nu)}{\beta-\gamma}, \\ z^2 = -\dfrac{(\gamma-\lambda)\ (\gamma-\mu)\ (\gamma-\nu)}{\gamma-\beta}. \end{cases}$$

Daher erhalten wir nur dann reelle Schnittpunkte, und zwar vier nur in dem Vorzeichen von y und z unterschiedene, wenn λ, μ, ν den Ungleichungen bei (10) genügen. Also schneiden sich drei ungleichnamige Paraboloide des konfokalen Systems stets in vier symmetrisch gegen die beiden Hauptebenen gelegenen Punkten, während zwei gleichnamige Paraboloide keinen reellen Punkt gemein haben.

Wir nennen die Parameter der durch einen Punkt P (x, y, z) gehenden Paraboloide λ, μ, ν die parabolischen Koordinaten dieses Punktes. Sie sind für einen gegebenen Punkt P (x, y, z) als Wurzeln der kubischen Gleichung (13) bestimmt, während sie ihrerseits, sobald sie den Ungleichungen bei (10) genügen, den Punkt (x, y, z) nach (15) vierdeutig bestimmen. Nach dieser Definition stellen die Gleichungen (14) und (15) Beziehungen zwischen den gewöhnlichen und parabolischen Koordinaten dar.

Ausgezeichnete parabolische Koordinaten haben folgende Punkte: In der Ebene $z=0$ ist für alle Punkte innerhalb der linken Fokalparabel $\lambda=\gamma$, außerhalb derselben $\mu=\gamma$; für die Fokalparabel selbst ist $\lambda=\gamma$, $\mu=\gamma$. In der Ebene $y=0$ ist außerhalb der rechten Fokalparabel $\mu=\beta$, innerhalb derselben $\nu=\beta$, während für alle Punkte, die der Fokalparabel selbst angehören, $\mu=\beta$, $\nu=\beta$ ist. Für die Punkte der Hauptachse ist links von B_0: $\lambda=\gamma$, $\mu=\beta$, zwischen B_0 und C_0 : $\lambda=\gamma$, $\nu=\beta$, rechts von C_0 : $\mu=\gamma$, $\nu=\beta$.

Für die Hauptbrennpunkte selbst ist: $B_0 : \lambda = \gamma$, $\mu = \beta$, $\nu = \beta$; $C_0 : \lambda = \gamma$, $\mu = \gamma$, $\nu = \beta$. (vergl. Fig. 5).

Um auch das unendlich Weite in unsere Betrachtungen einzuführen, setzen wir $x = \frac{x}{t}$, $y = \frac{y}{t}$, $z = \frac{z}{t}$, $\tau = \frac{\tau_1}{\tau_2}$, $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, $\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}$.

Dann geht die Gleichung (5) über in:

$$(5') \qquad \frac{y^2\,\tau_2^2}{\beta\tau_2 - \tau_1} + \frac{z^2\,\tau_2^2}{\gamma\tau_2 - \tau_1} + 2\,x t \tau_2 + t^2\,\tau_1 = 0.$$

Aus ihr erkennt man, daß das Paraboloid $\tau_2 = 0$ mit der doppelt zählenden unendlich fernen Ebene identisch wird. Die Gleichungen (13), (14) und (15) werden:

$$(13') \qquad p\,\tau_1^3 - q\,\tau_1^2\tau_2 + r\,\tau_1\tau_2^2 - s\,\tau_2^3 = 0,$$

$$(14') \quad \begin{cases} \lambda_2\mu_2\nu_2 = k\,t^2 = k\,p, \\ \lambda_1\mu_2\nu_2 + \mu_1\nu_2\lambda_2 + \nu_1\lambda_2\mu_2 \\ \qquad = k\left((\beta+\gamma)\,t^2 - 2\,x\,t\right) = k\,q, \\ \lambda_1\mu_1\nu_2 + \mu_1\nu_1\lambda_2 + \nu_1\lambda_1\mu_2 \\ \qquad = k\left(\beta\gamma\,t^2 - 2\,x\,t\,(\beta+\gamma) - y^2 - z^2\right) = k\,r, \\ \lambda_1\mu_1\nu_1 = k\left(-(\gamma\,y^2 + \beta\,z^2 + 2\,\beta\gamma\,x\,t)\right) = k\,s, \end{cases}$$

$$(15') \quad \begin{cases} k\,t^2 = \lambda_2\mu_2\nu_2 \\ k\,x\,t = \dfrac{(\beta+\gamma)\lambda_2\mu_2\nu_2 - \lambda_1\mu_2\nu_2 - \mu_1\nu_2\lambda_2 - \nu_1\lambda_2\mu_2}{2}, \\ k\,y^2 = -\dfrac{(\beta\lambda_2 - \lambda_1)\,(\beta\mu_2 - \mu_1)\,(\beta\nu_2 - \nu_1)}{\beta - \gamma}, \\ k\,z^2 = -\dfrac{(\gamma\lambda_2 - \lambda_1)\,(\gamma\mu_2 - \mu_1)\,(\gamma\nu_2 - \nu_1)}{\gamma - \beta}. \end{cases}$$

Wird die Diskriminante der Gleichung $(13') = 0$:

$$(16) \quad \begin{cases} \Delta = (\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)^2(\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2)^2(\nu_1\lambda_2 - \lambda_1\nu_2)^2 = 0, \\ \quad = (9\,p\,s - q\,r)^2 - 4\,(3\,p\,r - q^2)\,(3\,q\,s - r^2) = 0, \end{cases}$$

so werden zwei ihrer drei Wurzeln einander gleich. Folglich haben alle Punkte, deren Kartesische Koordinaten die zweite Gleichung (16) erfüllen, zwei gleiche parabolische Koordinaten.

Setzen wir $q = \big((\beta + \gamma)\,t - 2x\big)\,t = q' t$, so können wir Δ in die folgende Gestalt überführen:

$$(16') \quad \Delta = \big\{(9\,s\,t - q' r)^2 - 4\,(3\,r - q'^2)\,(3\,q\,s - r^2)\big\}\,t^2 = 0.$$

(16′) ist die Gleichung einer Fläche 8. Ordnung, welche in die doppelt zählende unendlich ferne Ebene und eine Fläche 6. Ordnung zerfällt. Sie ist zugleich die Schnittkurvenenveloppe der Flächenschar (1) [1]). Die reellen Bestandteile der Fläche (16′) sind die unendlich ferne Ebene und die beiden Fokalparabeln. Für die Punkte der linken Fokalparabel ist $\lambda = \mu = \gamma$, für die der rechten $\mu = \nu = \beta$, während für die Punkte der unendlich fernen Ebene $\lambda_2 = \nu_2 = 0$ ist, wie aus der Gleichung (13′) mit $t = 0$ folgt.

§ 8.

Das Hauptachsenproblem des Berührungskegels.

Die Gleichungen der Tangentialebenen der drei durch einen gegebenen Punkt P (x, y, z) des Raumes gehenden Paraboloide λ, μ, ν sind in den laufenden Koordinaten X, Y, Z in bezug auf das zugrunde gelegte Achsensystem $Oxyz = O\,X\,Y\,Z$:

$$(1) \qquad \frac{y\,Y}{\beta - \lambda} + \frac{z\,Z}{\gamma - \lambda} + X + x + \lambda = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{y\,Y}{\beta - \mu} + \frac{z\,Z}{\gamma - \mu} + X + x + \mu = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{y\,Y}{\beta - \nu} + \frac{z\,Z}{\gamma - \nu} + X + x + \nu = 0.$$

---

[1]) Vergl. Staude: Anal. Geom. d. Punktep. usw. § 123. 9.

Die Ebenen (1) und (2) stehen auf einander senkrecht, wenn:

$$(4) \qquad \frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}+\frac{z^2}{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)}+1=0.$$

Diese Bedingung ist stets erfüllt, da P (x, y, z) den Gleichungen der beiden Paraboloide λ, μ (vergl. § 7 (10)) genügen muß, also auch der durch Subtraktion folgenden Gleichung:

$$(5)\ (\lambda-\mu)\left\{\frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}+\frac{z^2}{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)}+1\right\}=0.$$

Aus dieser Gleichung gehen durch zyklische Vertauschung von λ, μ, ν zwei weitere Gleichungen hervor, welche aussagen, daß die Ebene (3) zu den Ebenen (1) und (2) senkrecht ist. Folglich stehen die 3 Tangentialebenen aufeinander senkrecht. Dies muß auch von ihren in P errichteten Normalen ξ, η, ζ gelten.

Wir wollen jetzt $P\xi\eta\zeta$ als neues Koordinatensystem einführen. Die neuen Achsen ξ, η, ζ haben die Richtungscosinus:

$$(6) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = l,\ \beta_1 = \dfrac{l\,y}{\beta-\lambda},\ \gamma_1 = \dfrac{l\,z}{\gamma-\lambda}, \\ \alpha_2 = m,\ \beta_2 = \dfrac{m\,y}{\beta-\mu},\ \gamma_2 = \dfrac{m\,z}{\gamma-\mu}, \\ \alpha_3 = n,\ \beta_3 = \dfrac{n\,y}{\beta-\nu},\ \gamma_3 = \dfrac{n\,z}{\gamma-\nu}, \end{cases}$$

$$\text{wo } l = \sqrt{\frac{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}},\quad m = \sqrt{\frac{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}},$$

$$n = \sqrt{\frac{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}}.$$

Zwischen den alten und neuen Koordinaten bestehen die Relationen:

$$X - x = l\xi + m\eta + n\zeta,$$

$$(7) \quad \begin{cases} Y - y = y\left(\dfrac{l\xi}{\beta - \lambda} + \dfrac{m\eta}{\beta - \mu} + \dfrac{n\zeta}{\beta - \nu}\right) \\ Z - z = z\left(\dfrac{l\xi}{\gamma - \lambda} + \dfrac{m\eta}{\gamma - \mu} + \dfrac{n\zeta}{\gamma - \nu}\right). \end{cases}$$

Lege ich jetzt von P (x, y, z) an die Fläche:

$$(8) \quad \frac{Y^2}{\beta - \tau} + \frac{Z^2}{\gamma - \tau} + 2X + \tau = 0$$

den Berührungskegel, so hat dieser in laufenden Koordinaten X, Y, Z die Gleichung:

$$(9) \quad TR - S^2 = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(10) \quad \begin{cases} R = \dfrac{(Y - y)^2}{\beta - \tau} + \dfrac{(Z - z)^2}{\gamma - \tau}, \\ S = \dfrac{y(Y - y)}{\beta - \tau} + \dfrac{z(Z - z)}{\gamma - \tau} + (X - x), \\ T = \dfrac{y^2}{\beta - \tau} + \dfrac{z^2}{\gamma - \tau} + 2x + \tau. \end{cases}$$

Durch die Substitution (7) stellen wir die Gleichung (9) in den neuen Koordinaten ξ, η, ζ dar. Die so erhaltene Gleichung läßt sich mit Hülfe von mehreren identischen Gleichungen, die zwischen den gemeinen x, y, z und den parabolischen Koordinaten λ, μ, ν bestehen[1]), schließlich auf die Form:

$$(11) \quad \frac{\xi^2}{\tau - \lambda} + \frac{\eta^2}{\tau - \mu} + \frac{\zeta^2}{\tau - \nu} = 0$$

bringen. (11) ist die Hauptachsengleichung des

[1]) Vergl. Staude: Analyt. Geometrie des Punktepaares usw. § 124.

Berührungskegels. Da P und τ ganz beliebig angenommen sind, so gilt stets der Satz:

Der von einem Punkte P des Raumes an eine Fläche τ des konfokalen Systems gelegte Berührungskegel hat als Hauptachsen die Normalen ξ, η, ζ der drei durch P gehenden Paraboloide λ, μ, ν des Systems.

Wollen wir untersuchen, ob der Kegel (11) eine ausgezeichnete Gestalt hat, ob er etwa ein Rotationskegel ist, oder ein Kegel mit rechtwinkligen Fokallinien, oder ein Kegel mit rechtwinkligen Scheitellinien in einer der beiden Hauptebenen usw., so müssen wir feststellen, ob gewisse Bedingungsgleichungen zwischen seinen drei Halbachsenquadraten $\tau - \lambda$, $\tau - \mu$, $\tau - \nu$ erfüllt sind. Diese Gleichungen haben zum Teil die Form:

$$(12) \qquad A\lambda + B\mu + C\nu + D = 0,$$

wo das τ in die Konstanten A, B, C, D aufgenommen ist. Fassen wir jetzt in der Gleichung (12) λ, μ, ν nicht als die Koordinaten eines gegebenen Punktes auf, sondern als laufende parabolische Koordinaten, so ist (12) eine lineare Gleichung zwischen räumlichen parabolischen Koordinaten. Nach dem Vorhergehenden lassen sich von allen Punkten, deren parabolische Koordinaten λ, μ, ν der Gleichung (12) genügen, Berührungskegel von spezieller Form an das Paraboloid τ legen. Bevor wir an die Aufstellung bestimmter Gleichungen gehen, wollen wir uns zunächst mit der allgemeinen Gleichung näher vertraut machen.

§ 9.

Die Bedeutung der linearen Gleichung zwischen räumlichen parabolischen Koordinaten.

Die betrachtete Gleichung (12) des vorhergehenden Paragraphen lautet in homogener Schreibweise:

$$(1) \quad A\lambda_1\mu_2\nu_2 + B\mu_1\nu_2\lambda_2 + C\nu_1\lambda_2\mu_2 + D\lambda_2\mu_2\nu_2 = 0.$$

Um das geometrische Gebilde kennen zu lernen, das durch diese Gleichung dargestellt wird, müssen wir die laufenden parabolischen Koordinaten $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ durch die homogenen rechtwinkligen Koordinaten x, y, z, t ausdrücken. Da $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ als Wurzeln der kubischen Gleichung (13′) des § 7 definiert sind, ist (1) in x, y, z, t irrational. Um eine in den gewöhnlichen Koordinaten rationale Gleichung zu erhalten, müssen wir in derselben Weise, wie bei den analogen Untersuchungen in der Ebene, verfahren, d. h. wir dürfen eine Gleichung nicht allein behandeln, sondern müssen ein System von Gleichungen betrachten, welches dadurch ausgezeichnet ist, daß das Produkt der linken Seiten der Gleichungen eine symmetrische Funktion der Wurzeln $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ wird. Diese Bedingung wird erfüllt durch das System:

$$\text{I} \quad \begin{cases} A\lambda_1\mu_2\nu_2 + B\mu_1\nu_2\lambda_2 + C\nu_1\lambda_2\mu_2 + D\lambda_2\mu_2\nu_2 = 0 \\ A\lambda_1\mu_2\nu_2 + C\mu_1\nu_2\lambda_2 + B\nu_1\lambda_2\mu_2 + D\lambda_2\mu_2\nu_2 = 0 \\ B\lambda_1\mu_2\nu_2 + A\mu_1\nu_2\lambda_2 + C\nu_1\lambda_2\mu_2 + D\lambda_2\mu_2\nu_2 = 0 \\ B\lambda_1\mu_2\nu_2 + C\mu_1\nu_2\lambda_2 + A\nu_1\lambda_2\mu_2 + D\lambda_2\mu_2\nu_2 = 0 \\ C\lambda_1\mu_2\nu_2 + A\mu_1\nu_2\lambda_2 + B\nu_1\lambda_2\mu_2 + D\lambda_2\mu_2\nu_2 = 0 \\ C\lambda_1\mu_2\nu_2 + B\mu_1\nu_2\lambda_2 + A\nu_1\lambda_2\mu_2 + D\lambda_2\mu_2\nu_2 = 0, \end{cases}$$

dessen sechs Gleichungen aus der Gleichung (1) durch alle möglichen Vertauschungen der $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ hervorgegangen sind. Das Produkt ihrer linken Seiten ist als symmetrische Funktion der Wurzeln einer kubischen Gleichung rational von den Koeffizienten p, q, r, s derselben und daher auch rational von x, y, z, t abhängig. Setzen wir dieses Produkt gleich 0, so haben wir eine rationale Gleichung in den gewöhnlichen Koordinaten, welche mit dem System I vollkommen äquivalent ist.

§ 10.

Einteilung der durch die linearen Gleichungen I dargestellten Flächen nach ihrer Ordnung.

Das Produkt der 6 Ausdrücke I ist eine symmetrische, homogene Funktion der $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ vom Gesamtgrade 6. Sie wird nach Einführung von p, q, r, s auch in diesen homogen vom 6. Grade und damit in den gewöhnlichen Koordinaten x, y, z, t homogen vom 12. Grade.

Folglich stellt das System linearer Gleichungen zwischen parabolischen Koordinaten I eine Fläche 12. Ordnung vor. Da p, q, r, s rational in x, y^2, z^2, t, liegt die Fläche symmetrisch zur xz- und xy-Ebene.

Nach § 7 sind für jeden Punkt der unendlich fernen Ebene $\lambda_2 = 0$, $\nu_2 = 0$. Entsprechend der Bildung der Gleichung der Fläche 12. Ordnung stellt jede der 6 Gleichungen I einen bestimmten Teil der Fläche dar. Jede Gleichung wird durch $\lambda_2 = 0$, $\nu_2 = 0$ erfüllt; folglich gehört zu ihrem Gebiete die unendlich ferne Ebene. Also zerfällt die Fläche 12. Ordnung in eine Fläche 6. Ordnung und die sechsfach zählende unendlich ferne Ebene.

Da durch die Zulassung von unendlich großen Werten λ, ν nur bewirkt wird, daß zu der Fläche 6. Ordnung die unendlich ferne Ebene hinzukommt, wollen wir uns für die weiteren Untersuchungen auf endliche Werte λ, μ, ν beschränken. Zu diesem Zwecke ersetzen wir in dem System I $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ durch λ, μ, ν:

$$\text{II} \qquad \begin{cases} A\lambda + B\mu + C\nu + D = 0 \\ A\lambda + B\nu + C\mu + D = 0 \\ A\mu + B\lambda + C\nu + D = 0 \\ A\mu + B\nu + C\lambda + D = 0 \\ A\nu + B\lambda + C\mu + D = 0 \\ A\nu + B\mu + C\lambda + D = 0. \end{cases}$$

Das System II stellt nach dem Gesagten eine Fläche 6. Ordnung dar, die symmetrisch zur xz- und xy-Ebene gelegen ist.

Werden zwei der Koeffizienten A, B, C einander gleich, etwa $B = C$, so enthält das System II jede der drei folgenden Gleichungen doppelt:

$$\text{III} \qquad \begin{cases} A\lambda + B(\mu + \nu) + D = 0 \\ A\mu + B(\nu + \lambda) + D = 0 \\ A\nu + B(\lambda + \mu) + D = 0. \end{cases}$$

Das Produkt der drei linken Seiten ist rational und vom 3. Grade in x, y, z. Die Fläche 6. Ordnung geht also in eine doppelt zählende Fläche 3. Ordnung über.

Das System III stellt eine Fläche III. Ordnung dar.

Wird endlich $A = B = C$, so enthält das System III die folgende Gleichung dreifach:

$$\text{IV} \qquad A(\lambda + \mu + \nu) + D = 0.$$

Da die linke Seite nach § 7 (14) linear in x und vom 0. Grade in y und z ist, wird die Fläche 3. Ordnung zur dreifach zählenden Ebene: $x = \text{const.}$

IV. stellt eine zur x-Achse senkrechte Ebene dar.

§ 11.

Die Hauptschnitte der Fläche:

$$\text{I}\quad\begin{cases} A\lambda+B\mu+C\nu+D=0 \\ A\lambda+B\nu+C\mu+D=0 \\ A\mu+B\lambda+C\nu+D=0 \\ A\mu+B\nu+C\lambda+D=0 \\ A\nu+B\lambda+C\mu+D=0 \\ A\nu+B\mu+C\lambda+D=0. \end{cases}$$

Nach den Gleichungen (11) des § 7 schneidet das System konfokaler Paraboloide aus jeder der beiden Hauptebenen ein System konfokaler Parabeln heraus. Beide Systeme zerfallen in eine Reihe linker und eine rechter Parabeln. Diese haben in laufenden ebenen parabolischen Koordinaten die Gleichungen

$$(1)\quad\begin{cases} \text{für die xy-Ebene:} \\ \dfrac{y^2}{\beta-\lambda(\mu)}+2x+\lambda(\mu)=0,\ \dfrac{y^2}{\beta-\nu}+2x+\nu=0, \\ -\infty<\lambda(\mu)\leqq\beta\leqq\nu<+\infty, \text{ Brennpunkt } B_0. \\ \text{für die xz-Ebene:} \\ \dfrac{z^2}{\gamma-\lambda}+2x+\lambda=0,\ \dfrac{z^2}{\gamma-\nu(\mu)}+2x+\nu(\mu)=0, \\ -\infty<\lambda\leqq\gamma\leqq\nu(\mu)<+\infty, \text{ Brennpunkt } C_0. \end{cases}$$

Die Kurven der Reihen stehen mit den konfokalen Paraboloiden in folgender Beziehung: In der xy-Ebene rühren die rechten Parabeln von den rechten elliptischen Paraboloiden her, die linken dagegen teils von den hyperbolischen, teils von den linken elliptischen Paraboloiden; die Grenze zwischen beiden Arten bildet die linke Fokalparabel. In der xz-Ebene gehen die linken Parabeln aus den linken elliptischen Paraboloiden hervor, während die rechten teils aus den hyper-

bolischen, teils aus den rechten elliptischen Paraboloiden entstehen. Beide Arten werden durch die rechte Fokalparabel getrennt. Die verschiedene Herkunft der Parabeln einer der beiden Reihen in jeder Ebene ist in den Formeln (1) dadurch zum Ausdruck gebracht, daß die Parameter mit $\lambda(\mu)$ bez. $\nu(\mu)$ bezeichnet sind.

Die xy-Ebene wird durch die linke Fokalparabel in das elliptische Paraboloid $\lambda = \gamma$ und das hyperbolische $\mu = \gamma$ geteilt. Zwischen den ebenen Koordinaten $\lambda(\mu)$, ν eines Punktes der Ebene und seinen räumlichen λ, μ, ν bestehen die Beziehungen, daß für alle Punkte die räumliche Koordinate ν mit der ebenen ν übereinstimmt. Innerhalb der Fokalparabel ist $\lambda = \gamma$, $\mu = \lambda(\mu)$, außerhalb derselben ist $\lambda = \lambda(\mu)$, $\mu = \gamma$.

Um die Schnittkurven der Fläche mit der xy-Ebene zu erhalten, untersuchen wir getrennt ihre Schnitte mit den Paraboloiden $\lambda = \gamma$ und $\mu = \gamma$. Die Schnittkurven mit $\lambda = \gamma$ stellen sich als räumliche Kurven durch die Gleichungenpaare dar:

II
$$\begin{cases} A\gamma + B\mu + C\nu + D = 0, & \lambda = \gamma \\ A\gamma + B\nu + C\mu + D = 0, & \lambda = \gamma \\ A\mu + B\gamma + C\nu + D = 0, & \lambda = \gamma \\ A\mu + B\nu + C\gamma + D = 0, & \lambda = \gamma \\ A\nu + B\gamma + C\mu + D = 0, & \lambda = \gamma \\ A\nu + B\mu + C\gamma + D = 0, & \lambda = \gamma. \end{cases}$$

Die Schnittkurven mit $\mu = \gamma$ sind:

III
$$\begin{cases} A\lambda + B\gamma + C\nu + D = 0, & \mu = \gamma \\ A\lambda + B\nu + C\gamma + D = 0, & \mu = \gamma \\ A\gamma + B\lambda + C\nu + D = 0, & \mu = \gamma \\ A\gamma + B\nu + C\lambda + D = 0, & \mu = \gamma \\ A\nu + B\lambda + C\gamma + D = 0, & \mu = \gamma \\ A\nu + B\gamma + C\lambda + D = 0, & \mu = \gamma. \end{cases}$$

Die Kurven II und III stehen nach dem oben Gesagten zu den ebenen Kurven der xy-Ebene:

IV
$$\begin{cases} A\gamma + B\lambda(\mu) + C\nu + D = 0 \\ A\gamma + B\nu + C\lambda(\mu) + D = 0 \\ A\lambda(\mu) + B\gamma + C\nu + D = 0 \\ A\lambda(\mu) + B\nu + C\gamma + D = 0 \\ A\nu + B\gamma + C\lambda(\mu) + D = 0 \\ A\nu + B\lambda(\mu) + C\gamma + D = 0 \end{cases}$$

in der Beziehung, daß die Kurven II mit den in das Gebiet $\lambda = \gamma$ fallenden Teilen der Kurven IV, die Kurven III mit den in das Gebiet $\mu = \gamma$ fallenden Teilen der Kurven IV identisch sind.

Demnach sind die Kurven IV die Schnittkurven der Fläche mit der xy-Ebene.

Wir wollen jetzt die ebenen parabolischen Koordinaten, wie im Abschnitt I, wieder mit λ, μ bezeichnen und dementsprechend in IV für $\lambda(\mu)$ λ, für ν μ einsetzen. Dann lassen sich die Gleichungen IV aus den Gleichungen der Fläche I in der Weise erhalten, daß wir $\nu = \gamma$ setzen und λ, μ als ebene parabolische Koordinaten, bezogen auf den Brennpunkt B_0, auffassen. Wir bekommen dann für die Schnittkurven die Gleichungen:

V
$$\begin{cases} A\lambda + B\mu + C\gamma + D = 0 \quad (1) \\ A\lambda + B\gamma + C\mu + D = 0 \quad (2) \\ A\mu + B\lambda + C\gamma + D = 0 \quad (1) \\ A\mu + B\gamma + C\lambda + D = 0 \quad (2) \\ A\gamma + B\lambda + C\mu + D = 0 \quad (3) \\ A\gamma + B\mu + C\lambda + D = 0 \quad (3). \end{cases}$$

Die sechs Gleichungen zerfallen in drei Paare (1), (2), (3), von denen jedes nach § 3 einen symmetrisch zur x-Achse gelegenen Kegelschnitt darstellt, dessen einer Brennpunkt mit dem Hauptbrennpunkt B_0 zusammenfällt.

Die Fläche I schneidet demnach die Ebene $z = 0$ in drei Kegelschnitten.

Die Arten der Kegelschnitte lassen sich mit Hülfe von § 6 feststellen.

Die Kegelschnitte (1) und (2) schneiden sich in den vier Punkten:

$$\lambda = \gamma, \quad \mu = -\frac{(B + C)\gamma + D}{A}; \tag{4}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \dfrac{(AB - C^2)\gamma + D(A - C)}{CB - A^2}, \\ \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \dfrac{(AC - B^2)\gamma + D(A - B)}{CB - A^2}. \end{cases} \tag{5}$$

Dabei bedeutet $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, daß λ oder μ als Koordinate zu nehmen ist, je nachdem die rechte Seite kleiner oder größer als β ist, $\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$, daß der zweite Ausdruck (5) die nicht durch den ersten Ausdruck dargestellte Koordinate sein soll.

Die Schnittpunkte der Kegelschnitte (2) und (3) sind:

$$\lambda = \gamma, \quad \mu = -\frac{(A + B)\gamma + D}{C}; \tag{6}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \dfrac{(AC - B^2)\gamma + D(C - B)}{AB - C^2}, \\ \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \dfrac{(BC - A^2)\gamma + D(C - A)}{AB - C^2}, \end{cases} \tag{7}$$

der Kegelschnitte (3) und (1):

$$\lambda = \gamma, \quad \mu = -\frac{(C + A)\gamma + D}{B}; \tag{8}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \dfrac{(CB - A^2)\gamma + D(B - A)}{CA - B^2}, \\ \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \dfrac{(AB - C^2)\gamma + D(B - C)}{CA - B^2}. \end{cases} \tag{9}$$

Die Schnittpunkte sind reell, wenn ihre Koordinaten der Ungleichung:

$$-\infty < \lambda \leqq \beta \leqq \mu < +\infty$$

genügen. Da $\lambda = \gamma$ in den ebenen parabolischen Koordinaten die Gleichung der linken Fokalparabel ist, so folgt aus den Gleichungen (4), (6), (8), daß das eine Schnittpunktepaar von je zwei Kegelschnitten, falls es reell ist, auf der linken Fokalparabel liegt. Ferner ergibt sich mit $\lambda = \gamma$ aus den Gleichungen V, daß die Kegelschnitte die Fokalparabel nur in den Punkten (4), (6), (8) schneiden können. Folglich muß durch jeden Schnittpunkt eines Kegelschnittes mit der Fokalparabel noch ein zweiter Kegelschnitt gehen.

Die Schnittpunkte der Kegelschnitte sind Doppelpunkte der ganzen Schnittkurve 6. Ordnung der Fläche I mit der xy-Ebene und damit auch Doppelpunkte der Fläche selbst.

Für spezielle Werte von A, B, C, D können noch folgende Doppelpunkte und Doppelkurven in der xy-Ebene auftreten:

Ist eine der Gleichungen:

$$(10) \qquad \begin{cases} (A+B)\beta + C\gamma + D = 0, \\ (B+C)\beta + A\gamma + D = 0, \\ (C+A)\beta + B\gamma + D = 0 \end{cases}$$

erfüllt, zerfällt einer der drei Kegelschnitte V in ein Linienpaar mit B_0 als Doppelpunkt.

Genügen A, B, C, D einem der sechs Gleichungenpaare:

$$(11) \qquad \begin{cases} A = 0, \ B\gamma + C\beta + D = 0, \\ A = 0, \ C\gamma + B\beta + D = 0, \\ B = 0, \ A\gamma + C\beta + D = 0, \\ B = 0, \ C\gamma + A\beta + D = 0, \\ C = 0, \ A\gamma + B\beta + D = 0, \\ C = 0, \ B\gamma + A\beta + D = 0, \end{cases}$$

gehört die x-Achse als Doppellinie zu den drei Kegelschnitten V.

Wird eine der Gleichungenpaare:

$$(12)\qquad \begin{cases} A = 0,\ (B + C)\gamma + D = 0, \\ B = 0,\ (C + A)\gamma + D = 0, \\ C = 0,\ (A + B)\gamma + D = 0 \end{cases}$$

befriedigt, gehört die linke Fokalparabel als Doppelkurve den Kegelschnitten V an.

Die sechs Schnittpunkte der drei Kegelschnitte V mit der x-Achse erhalten wir, wenn wir in den Gleichungen V $\mu = \beta$ setzen und λ als die laufende parabolische Koordinate der x-Achse ansehen. Dabei wollen wir unter der parabolischen Koordinate eines Punktes der x-Achse den Parameter τ des Paraboloids des konfokalen Systems verstehen, das diesen Punkt zum Scheitel hat. λ ist dann mit der laufenden Koordinate x der x-Achse durch die Relation $x = -\lambda/_2$ verbunden. Diese Schnittpunkte sind zugleich die Schnittpunkte der Fläche I mit der x-Achse.

Die Ausführungen, welche wir für die xy-Ebene gemacht haben, gelten auch für die xz-Ebene mit der Modifikation, daß wir β und γ mit einander vertauschen und λ, μ als parabolische Koordinaten der xz-Ebene mit dem Brennpunkt C_0 ansehen.

Wir erhalten demnach auch in dieser Ebene als Schnittkurven drei Kegelschnitte, die sich paarweise in zwei Schnittpunktepaaren schneiden, von denen das eine Paar, falls es reell ist, auf der rechten Fokalparabel liegt. Die Kegelschnitte schneiden die x-Achse in den sechs Schnittpunkten der Fläche (vergl. Fig. 7. Die untere Hälfte stellt die halbe xy-, die obere die halbe xz-Ebene dar; die zu ergänzenden Halbebenen entstehen durch Spiegelung der vorhandenen an der x-Achse).

§ 12.

Die Schalen der Fläche 6. Ordnung:

I
$$\begin{cases} A\lambda + B\mu + C\nu + D = 0 & \text{(1. Schale)} \\ A\lambda + B\nu + C\mu + D = 0 & \text{(2. Schale)} \\ A\mu + B\lambda + C\nu + D = 0 & \text{(3. Schale)} \\ A\mu + B\nu + C\lambda + D = 0 & \text{(4. Schale)} \\ A\nu + B\lambda + C\mu + D = 0 & \text{(5. Schale)} \\ A\nu + B\mu + C\lambda + D = 0 & \text{(6. Schale).} \end{cases}$$

Wir führen in unsere Betrachtungen einen Hilfsraum ein, in dem wir λ, μ, ν als Kartesische Koordinaten deuten (vergl. Fig. 6). Mit diesem Raume wollen wir den xyz-Raum in die Beziehung setzen, daß jedem Punkte (x, y, z) mit den parabolischen Koordinaten λ, μ, ν im $\lambda\mu\nu$-Raume der Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten λ, μ, ν entsprechen soll. Da im xyz-Raume stets λ, μ, ν der Ungleichung:

$$-\infty < \lambda \leq \gamma \leq \mu < \beta < \nu < +\infty$$

genügen, wird der ganze xyz-Raum durch das in Fig. 6 mit E bezeichnete Gebiet, welches durch die Ebenen $\lambda = \gamma$, $\mu = \gamma$, $\mu = \beta$, $\nu = \beta$ begrenzt ist, wiedergegeben. Umgekehrt haben nur die Punkte des Gebietes E reelle korrespondierende Punkte (x, y, z) und zwar je vier symmetrisch zur xz- und xy-Ebene liegende. E ist ein rechtwinkliges Parallelopipedon, welches sich in zwei Richtungen ins Unendliche erstreckt. Seinen Kanten entsprechen im xyz-Raume folgende Kurven: der Kante a die linke Fokalparabel ($\lambda = \gamma$, $\mu = \gamma$), der Kante d die rechte Fokalparabel ($\mu = \beta$, $\nu = \beta$), der Kante b das Stück der x-Achse links von B_0 ($\lambda = \gamma$, $\mu = \beta$), der Kante e das Stück zwischen B_0 und C_0 ($\lambda = \gamma$, $\nu = \beta$), der Kante c das Stück rechts von C_0 ($\mu = \gamma$, $\nu = \beta$). Die Eckpunkte

G, H haben die Hauptbrennpunkte C_0 bez. B_0 zu korrespondierenden Punkten.

Jede der Gleichungen I stellt im $\lambda\mu\nu$-Raume eine Ebene dar. Die Teile der 6 Ebenen, welche in das Gebiet E hineinfallen, sind das Bild der reellen Fläche 6. Ordnung, während die außerhalb des Gebietes E liegenden Teile der Ebenen den imaginären Punkten entsprechen, deren Koordinaten den Gleichungen I genügen. Da in jeder Ebene die Punkte (λ, μ, ν) sich stetig aneinanderreihen, werden dies auch die Bildpunkte (x, y, z) in jedem der vier Quadranten tun, in die der xyz-Raum durch die xy- und xz-Ebene zerlegt ist. Folglich entsprechen jeder Ebene vier symmetrisch zur xy- und xz-Ebene gelegene Flächenstücke. Nun muß jede Ebene im $\lambda\mu\nu$-Raume unter der Voraussetzung, daß nicht zwei der Koeffizienten A, B, C zugleich verschwinden, mindestens drei der Ebenen $\lambda = \gamma$, $\mu = \gamma$, $\mu = \beta$, $\nu = \beta$ schneiden. Daher müssen die vier entsprechenden Flächenstücke in der xy- und xz-Ebene miteinander zusammenhängen und ein einziges Flächenstück bilden. Folglich stellt jede der Gleichungen I einen bestimmt abgegrenzten, zusammenhängenden Teil der Fläche 6. Ordnung dar. Diese sechs Teile der Fläche wollen wir von jetzt an als „Schalen“[1]) derselben bezeichnen, ohne Rücksicht darauf, ob sie reell sind oder nicht.

Wann sind die Schalen reell? wenn die ihnen im $\lambda\mu\nu$-Raume entsprechenden Ebenen das Gebiet E schneiden. Dies ist der Fall, wenn sie eine der fünf Kanten a, b, c, d, e schneiden. Nun trifft jede Ebene: $A\lambda + B\mu + C\nu + D = 0$, für die höchstens einer der Koeffizienten A, B, C verschwindet, sicherlich auch eine der Kanten a, b, c, d, wenn sie die Kante e schneidet. Daher können wir die letztere unberücksichtigt lassen.

[1]) Vergl. O. Staude: Über lineare Gleichungen zwischen elliptischen Koordinaten. Leipzig 1881. Seite 54.

Um die Realität der 1. Schale zu untersuchen, führen wir die Abkürzungen:

$E_1 = (A + B)\gamma + C\beta + D$, $E_2 = A\gamma + (B + C)\beta + D$ ein. Wir unterscheiden mehrere Fälle:

1) $A > 0$, B, $C > 0$:

Die 1. Ebene schneidet a, wenn $E_1 \leqq 0$,
„ „ b, „ $E_2 \leqq 0$,
„ „ c, „ $E_1 \geqq 0$,
„ „ d, „ $E_2 \geqq 0$.

Die 1. Schale ist stets reell; sie geht für $E_1 = 0$ durch C_0, für $E_2 = 0$ durch B_0. Ist $B = 0$, wird $E_1 = E_2$. Für $B = 0$, $E_1 = E_2 = 0$ geht die Schale durch das Stück $\overline{B_0 C_0}$ der x-Achse.

2) $A > 0$, B, $C < 0$:

Die 1. Ebene schneidet a, wenn $E_1 \geqq 0$,
„ „ b, „ $E_2 \geqq 0$,
„ „ c, „ $E_1 \geqq 0$,
„ „ d, „ $E_2 \geqq 0$.

Die 1. Schale ist reell, wenn E_1 oder $E_2 \geqq 0$.
Sie reduziert sich für $E_1 = 0$, $B < 0$ auf C_0,
„ $E_2 = 0$, $B > 0$ „ B_0.

Erfüllt B die Ungleichungen nicht, geht die Schale durch die bezüglichen Punkte hindurch. Ist $B = 0$, $E_1 = E_2 = 0$, reduziert sich die Schale auf das Stück $\overline{B_0 C_0}$ der x-Achse.

3) $A > 0$, $B \neq 0$, $C = 0$:

Die 1. Ebene steht senkrecht auf der $\lambda\mu$-Ebene. Es sind daher nur die Schnitte mit den Kanten c, d zu untersuchen.

Die Ebene schneidet c, wenn $E_1 \geqq 0$,
„ „ „ d, „ $E_2 \geqq 0$.

Die 1. Schale ist reell, wenn $E_1 \geqq 0$ oder $E_2 \geqq 0$. Sie reduziert sich:

für $E_1 = 0$, $B < 0$ auf die linke Fokalparabel,
für $E_2 = 0$, $B > 0$ auf das Stück ($\lambda = \gamma$, $\mu = \beta$) der x-Achse.

Wenn B den Ungleichungen nicht genügt, gehören die bezüglichen Kurven der Schale an.

4) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \gtrless 0$.

Die 1. Ebene steht senkrecht zur $\mu\nu$-Ebene. Wir brauchen nur die Kanten a und b zu berücksichtigen. Die 1. Ebene schneidet diese Kanten, wenn die für $A > 0$ geltenden, aus 1. und 2. zu entnehmenden Bedingungen erfüllt sind. Folglich ist die 1. Schale

für $C > 0$ reell, wenn E_1 oder $E_2 \leqq 0$,
„ $C < 0$ „ , „ E_1 „ $E_2 \geqq 0$.

Sie reduziert sich für:

$E_1 = 0$, $B > 0$, $C > 0$;
$E_1 = 0$, $B < 0$, $C < 0$ } auf das Stück ($\mu = \gamma$, $\nu = \beta$) der x-Achse,

$E_2 = 0$, $B < 0$, $C > 0$;
$E_2 = 0$, $B > 0$, $C < 0$ } auf die rechte Fokalparabel.

Befriedigen B und C die Ungleichungen nicht, geht die 1. Schale durch die bezüglichen Kurven hindurch.

Wenn $A < 0$, multiplizieren wir die Gleichungen mit -1, wodurch wir einen der behandelten Fälle erhalten. Wollen wir für irgend eine Schale die Realität untersuchen, so müssen wir in die obigen Bedingungsgleichungen für A, B, C die Koeffizienten von λ, μ, ν der Gleichung der Schale einsetzen. Dabei

ergeben sich für die behandelten Spezialfälle folgende Beziehungen zwischen den Schalen:

Es schneiden sich in der linken Fokalparabel:
die 1. und 3. Schale, wenn $C = 0$, $(A + B)\gamma + D = 0$,
„ 2. „ 4. „ , „ $B = 0$, $(C + A)\gamma + D = 0$,
„ 5. „ 6. „ , „ $A = 0$, $(B + C)\gamma + D = 0$,

in der rechten Fokalparabel:
die 1. und 2. Schale, wenn $A = 0$, $(B + C)\beta + D = 0$,
„ 3. „ 5. „ , „ $B = 0$, $(C + A)\beta + D = 0$,
„ 4. „ 6. „ , „ $C = 0$, $(A + B)\beta + D = 0$,

Es gehen durch die Abschnitte

der x-Achse:	$\lambda=\gamma$, $\mu=\beta$.	$\lambda=\gamma$, $\nu=\beta$	$\mu=\gamma$, $\nu=\beta$	
die	1.	2.	4.	Schale, wenn $C=0, A\gamma+B\beta+D=0$,
„	3.	5.	6.	„ , „ $C=0, B\gamma+A\beta+D=0$,
„	2.	1.	3.	„ , „ $B=0, A\gamma+C\beta+D=0$,
„	4.	6.	5.	„ , „ $B=0, C\gamma+A\beta+D=0$,
„	5.	3.	1.	„ , „ $A=0, B\gamma+C\beta+D=0$,
„	6.	4.	2.	„ , „ $A=0, C\gamma+B\beta+D=0$.

Hieraus folgt in Übereinstimmung mit § 11, daß die Fokalparabeln, sobald sie der Fläche angehören, Doppelkurven derselben sind. Ferner sehen wir, daß, sobald ein Teil der x-Achse der Fläche angehört, die x-Achse der Fläche ganz zukommt. Sie ist dann gleichfalls nach § 11 eine Doppellinie der Fläche.

§ 13.

Doppelpunkte und Doppelkurven der Fläche 6. Ordnung.

Die Trennung der Fläche in sechs Schalen gibt uns ein übersichtliches Bild ihrer Doppelpunkte und

Doppelkurven. Zunächst kann jede ihrer Schalen, für sich betrachtet, weil ihr Bild im $\lambda\mu\nu$-Raume eine Ebene ist, innerhalb eines Quadranten keine Doppelpunkte haben. Diese können nur in den Hauptebenen liegen. Die in diesen vorkommenden Doppelpunkte der Fläche haben wir in § 11 kennen gelernt. Die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte sind, wie wir später sehen werden, Berührungspunkte zweier Schalen, beziehungsweise Punkte ihrer gemeinsamen Schnittkurve. Sie kommen daher einer Schale nicht allein zu. Auch eine Fokalparabel, die als Doppelkurve in den Hauptebenen auftreten kann, gehört einer Schale nicht allein an, da nach dem vorhergehenden Paragraphen immer zwei Schalen durch sie hindurchgehen. Nur für den Fall, daß die Schale durch einen Teil der x-Achse geht, ist dieser Teil eine Doppelkurve der Schale selbst. Außer diesen Doppelpunkten, die auftreten, wenn eine der in der Tabelle des vorhergehenden Paragraphen angegebenen Bedingungsgleichungen erfüllt ist, können Doppelpunkte und Doppelkurven nur durch die Berührung und den Schnitt von zwei Schalen entstehen. Dies geschieht, wenn die den Schalen im $\lambda\mu\nu$-Raume entsprechenden Ebenen sich innerhalb des Gebietes E schneiden oder einen Punkt gemeinsam haben. Das Letztere ist nur auf den Kanten a, b, c, d, e selbst möglich. Folglich können die Schalen sich nur auf den Fokalparabeln und der x-Ache berühren. Wir müssen daher die Wertetripel (λ, μ, ν) zu bestimmen suchen, die den Gleichungen zweier Schalen zugleich genügen. Durch einige einfache Rechenoperationen erhält man folgendes Resultat:

Sechs Schalenpaare haben keine Kurven, sondern nur zwei Punkte gemeinsam, sechs Schalenpaare schneiden sich in Kurven, drei Schalenpaare können keine gemeinsamen Punkte haben. Es berühren sich auf der linken Fokalparabel $\lambda = \gamma$, $\mu = \gamma$:

die 1. und 3. Schale in $\lambda = \gamma, \mu = \gamma, \nu = -\frac{(A+B)\gamma + D}{C}$,

„ 2. „ 4. „ „ „ „ „ „ $\nu = -\frac{(C+A)\gamma + D}{B}$,

„ 5. „ 6. „ „ „ „ „ „ $\nu = -\frac{(B+C)\gamma + D}{A}$;

auf der rechten Fokalparabel $\mu = \beta$, $\gamma = \beta$:

die 1. und 2. Schale in $\lambda = -\frac{(B+C)\beta + D}{A}, \mu = \beta, \nu = \beta$,

„ 3. „ 5. „ „ $\lambda = -\frac{(C+A)\beta + D}{B}$, „ „ „ „

„ 4. „ 6. „ „ $\lambda = -\frac{(A+B)\beta + D}{C}$, „ „ „ „

In Raumkurven schneiden sich die 1. und 4., 2. und 3., 1. und 5., 2. und 6., 3. und 6., 4. und 5. Schale.

Keine gemeinsamen Punkte haben die 3. und 4., 1. und 6., 2. und 5. Schale, da für diese $\lambda = \nu$ sein muß.

Die Doppelpunkte sind reel, wenn ihre Koordinaten λ, μ, ν der Ungleichung:

$$-\infty < \lambda < \gamma < \mu < \beta \leq \nu < +\infty$$

genügen. Die Realität der Doppelkurven bedarf in jedem konkreten Falle der genaueren Untersuchung. Die Fläche 6. Ordnung kann daher höchstens sechs Paar Doppelpunkte und sieben Doppelkurven haben, wobei die für bestimmte Werte als Doppellinie auftretende x-Achse mitgezählt worden ist. Die Doppelpunkte der Fläche sind identisch mit den Doppelpunkten der Schnittkurven 6. Ordnung in den beiden Hauptebenen, welche auf den Fokalparabeln liegen; die übrigen Doppelpunkte der Schnittkurven liegen auf den Doppelkurven der Fläche (vergl. Fig. 7).

Außer den Spezialfällen, die wir schon im vorhergehenden Paragraphen behandelt haben, ist noch der Fall:

$$A + B + C = 0,\ D = 0$$

zu erwähnen. Es treten dann weder Doppelpunkte noch Doppelkurven auf. Wir werden ein Beispiel dieser Art in § 15 kennen lernen.

§ 14.

Die Hauptschnitte der einzelnen Schalen.

Um die Schnittkurve der 1. Schale:

(1) $$A\lambda + B\mu + C\nu + D = 0$$

mit der xy-Ebene zu erhalten, untersuchen wir getrennt ihre Schnitte mit den Paraboloiden $\lambda = \gamma$ und $\mu = \gamma$. Diese stellen sich als räumliche Kurven durch die Gleichungenpaare dar:

(2) $$A\gamma + B\mu + C\nu + D = 0,\ \lambda = \gamma,$$

(3) $$A\lambda + B\gamma + C\nu + D = 0,\ \mu = \gamma.$$

Nach den Ausführungen des § 11 stehen (2) und (3) zu den ebenen Kurven der xy-Ebene:

(2′) $$A\gamma + B\lambda_{(\mu)} + C\nu + D = 0,$$

(3′) $$A\lambda_{(\mu)} + B\gamma + C\nu + D = 0$$

in dem Verhältnis, daß die Kurve (2) mit dem in das Gebiet $\lambda = \gamma$ fallenden Teile von (2′) und die Kurve (3) mit dem in das Gebiet $\mu = \gamma$ fallenden Teile von (3′) identisch wird. Aus diesen beiden Teilen (2) und (3), welche in den beiden auf der Fokalparabel gelegenen Schnittpunkten von (2′) und (3′):

$$\lambda = \gamma,\ \mu = \gamma,\ \nu = -\frac{(A + B)\gamma + D}{C}$$

zusammenstoßen, setzt sich die ganze Schnittkurve der Schale (1) mit der xy-Ebene zusammen (vergl. Fig. 7).

In gleicher Weise können wir die Schnittkurven der übrigen Schalen finden. Analoge Betrachtungen lassen sich für die xz-Ebene machen, die durch die rechte Fokalparabel in die Paraboloide $\mu = \beta$ und $\nu = \beta$ geteilt ist.

Wir können hiernach die Hauptschnitte der sechs Schalen der Fläche 6. Ordnung in folgendem Schema darstellen.

	1. Schale	2. Schale	3. Schale
xy-Ebene $\lambda=\gamma$	$A\gamma+B\mu+C\nu+D=0$	$A\gamma+B\nu+C\mu+D=0$	$A\mu+B\gamma+C\nu+D=0$
xy-Ebene $\mu=\gamma$	$A\lambda+B\gamma+C\nu+D=0$	$A\lambda+B\nu+C\gamma+D=0$	$A\gamma+B\lambda+C\nu+D=0$
xz-Ebene $\mu=\beta$	$A\lambda+B\beta+C\nu+D=0$	$A\lambda+B\nu+C\beta+D=0$	$A\beta+B\lambda+C\nu+D=0$
xz-Ebene $\nu=\beta$	$A\lambda+B\mu+C\beta+D=0$	$A\lambda+B\beta+C\mu+D=0$	$A\mu+B\lambda+C\beta+D=0$

	4. Schale	5. Schale	6. Schale
xy-Ebene $\lambda=\gamma$	$A\mu+B\nu+C\gamma+D=0$	$A\nu+B\gamma+C\mu+D=0$	$A\nu+B\mu+C\gamma+D=0$
xy-Ebene $\mu=\gamma$	$A\gamma+B\nu+C\lambda+D=0$	$A\nu+B\lambda+C\gamma+D=0$	$A\nu+B\gamma+C\lambda+D=0$
xz-Ebene $\mu=\beta$	$A\beta+B\nu+C\lambda+D=0$	$A\nu+B\lambda+C\beta+D=0$	$A\nu+B\beta+C\lambda+D=0$
xz-Ebene $\nu=\beta$	$A\mu+B\beta+C\lambda+D=0$	$A\beta+B\lambda+C\mu+D=0$	$A\beta+B\mu+C\lambda+D=0$.

Die Hauptschnitte sämtlicher Schalen zusammengenommen ergeben in jeder Ebene drei Kegelschnitte. Die Verteilung der Kegelschnitte auf die Schalen geht in der Weise vor sich, daß jeder Kegelschnittzweig, der die Fokalparabel seiner Ebene nicht trifft, der ganze Hauptschnitt einer Schale ist, während je zwei Zweige, die sich auf einer Fokalparabel schneiden, sich auf zwei Schalen so verteilen, daß der innerhalb der Parabel liegende Teil jedes Zweiges mit dem außerhalb derselben liegenden Teile des anderen Zweiges zusammen den Hauptschnitt je einer Schale bildet. Beide Schalen

haben nach § 13 nur diese beiden Schnittpunkte mit der Parabel mit einander gemeinsam. Folglich müssen diese Punkte Spitzen der Schalen sein.

§ 15.

Spezielle Flächen 6. Ordnung.

Ein elliptischer Kegel kann in den laufenden Koordinaten x', y', z' durch die Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2 - d^2} + \frac{z'^2}{a^2 - e^2} = 0, \; e^2 > a^2 > d^2$$

dargestellt werden. Definieren wir den Kegel als den Ort eines Strahles p in einem Strahlenbündel, für den die Summe oder Differenz der Winkel, die er mit zwei festen Strahlen f und f' bildet, den festen Wert $\pm 2\alpha$ behält, und bilden f und f', die dann die Brennstrahlen des Kegels werden, den Winkel ε mit der z'-Achse, so stehen die Winkel α und ε mit den Konstanten der Gleichung (1) in dem Zusammenhange, daß:

$$(2) \qquad \sin\alpha = \frac{a}{e}, \; \sin\varepsilon = \frac{d}{e}$$

ist [1]). Aus (2) folgt:

$$a^2 = e^2 \sin^2\alpha, \; a^2 - d^2 = e^2(\sin^2\alpha - \sin^2\varepsilon),$$

$$a^2 - e^2 = -e^2\cos^2\alpha.$$

Daher läßt sich die Gleichung (1) auf die Form:

$$(3) \qquad \frac{x'^2}{\sin^2\alpha} + \frac{y'^2}{\sin^2\alpha - \sin^2\varepsilon} - \frac{z'^2}{\cos^2\alpha} = 0$$

bringen. Da $\sin^2\alpha > \sin^2\varepsilon$, ist die z'-Achse die innere Hauptachse des Kegels.

---

[1]) Vergl. O. Staude: Anal. Geom. d. Punktepaares usw. § 130.

Wir nehmen jetzt an, daß der Kegel (3) der von dem Punkte P (λ, μ, ν) an das Paraboloid τ des konfokalen Systems § 7 (5) gelegte Berührungskegel sei. Seine Hauptachsengleichung in laufenden ξ-, η-, ζ-Koordinaten lautet nach der Gleichung (11) des § 8:

$$\frac{\xi^2}{\tau-\lambda}+\frac{\eta^2}{\tau-\mu}+\frac{\zeta^2}{\tau-\nu}=0. \tag{4}$$

(3) und (4) sind die Hauptachsengleichungen desselben Kegels; folglich müssen die Koordinatenachsen x′, y′, z′ und ξ, η, ζ paarweise zusammenfallen. Es ist nun zu untersuchen, welche Achsen zusammenfallen.

Der Kegel (4) ist nur dann reell, wenn $\lambda<\tau<\nu$. Für die reellen Kegel können daher nur die beiden Fälle $\lambda<\tau<\mu$, $\mu<\tau<\nu$ auftreten.

Erster Fall $\mu<\tau<\nu$:

Die ξ-Achse fällt mit der x′-, die η- mit der y′-, die ζ- mit der z′-Achse zusammen. Es bestehen dann die Beziehungen:

$$\begin{cases} \varrho\sin^2\alpha=\tau-\lambda, \\ \varrho(\sin^2\alpha-\sin^2\varepsilon)=\tau-\mu, \\ -\varrho\cos^2\alpha=\tau-\nu. \end{cases} \tag{5}$$

Durch Subtraktion der ersten und dritten Gleichung folgt:

$$\varrho=\nu-\lambda \tag{6}$$

Durch Division der ersten und dritten Gleichung (5) und durch Subtraktion der beiden ersten mit Benutzung von (6) ergibt sich:

$$\begin{cases} \lambda\cos^2\alpha+\nu\sin^2\alpha-\tau=0, \\ \lambda\cos^2\varepsilon-\mu+\nu\sin^2\varepsilon=0. \end{cases} \tag{7}$$

Zweiter Fall $\lambda < \tau < \mu$:

Die ξ-Achse fällt mit der z′-, die η- mit der y′-, die ζ- mit der x′-Achse zusammen. Zwischen den Winkeln α, ε und den Größen λ, μ, ν, τ bestehen jetzt die Beziehungen:

$$(8) \qquad \begin{cases} \lambda \sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha - \tau = 0, \\ \lambda \sin^2 \varepsilon - \mu + \nu \cos^2 \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Ich nehme jetzt an, daß die Größen λ, μ, ν, τ so gewählt sind, daß $\mu < \tau < \nu$ ist. Dann gibt mir die zweite Gleichung (7) den Winkel ε, den die beiden Brennstrahlen des von (λ, μ, ν) an das Paraboloid τ gelegten Berührungskegels mit der ζ-Achse bilden, welche nach § 8 die Normale der Tangentialebene an das Paraboloid ν des konfokalen Systems in dem Punkte P (λ, μ, ν) ist. Da τ in der Gleichung nicht mehr vorkommt, haben die Berührungskegel an alle Paraboloide des konfokalen Systems § 7 (5) dieselben Brennstrahlen. Nehme ich jetzt in der Gleichung:

$$(7') \qquad \lambda \cos^2 \varepsilon - \mu + \nu \sin^2 \varepsilon = 0$$

ε als gegeben und λ, μ, ν als laufende parabolische Koordinaten an, so ist (7′) die Bedingungsgleichung, welcher die Punkte (λ, μ, ν) genügen müssen, damit die Brennstrahlen der von ihnen an die Paraboloide τ gelegten Berührungskegel mit der ζ-Achse den Winkel ε einschließen. (7′) ist die Gleichung einer Schale der Fläche 6. Ordnung:

I.
$$\begin{cases} \lambda \cos^2 \varepsilon - \mu + \nu \sin^2 \varepsilon = 0 & \text{(1. Schale)} \\ \lambda \cos^2 \varepsilon - \nu + \mu \sin^2 \varepsilon = 0 & \text{(2. Schale)} \\ \mu \cos^2 \varepsilon - \lambda + \nu \sin^2 \varepsilon = 0 & \text{(3. Schale)} \\ \mu \cos^2 \varepsilon - \nu + \lambda \sin^2 \varepsilon = 0 & \text{(4. Schale)} \\ \nu \cos^2 \varepsilon - \lambda + \mu \sin^2 \varepsilon = 0 & \text{(5. Schale)} \\ \nu \cos^2 \varepsilon - \mu + \lambda \sin^2 \varepsilon = 0 & \text{(6. Schale).} \end{cases}$$

Untersuche ich mit Hülfe der in § 12 angegebenen Methoden die Realität der Schalen dieser Fläche, so finde ich, daß nur die 1. und 6. Schale reell sind. Vergleiche ich die Gleichung der 6. Schale mit der zweiten Gleichung (8), so zeigt sich, daß die 6. Schale der Ort der Scheitel aller Berührungskegel ist, deren Brennstrahlen mit der ξ-Achse den Winkel ε bilden.

Folglich sind die reellen Schalen der Fläche I der Ort der Scheitel der Berührungskegel, deren Brennstrahlen mit der ξ- oder ζ-Achse den Winkel ε bilden.

Da das konstante Glied der Gleichungen I $D = 0$ und $A + B + C = \cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon - 1 = 0$, so hat nach § 13 unsere Fläche weder Doppelpunkte noch Doppelkurven.

Die Schnittkurve mit der x y-Ebene hat in laufenden ebenen Koordinaten λ, μ die Gleichungen:

II.
$$\begin{cases} \lambda\cos^2\varepsilon - \mu + \gamma\sin^2\varepsilon = 0 & (1) \\ \lambda\cos^2\varepsilon - \gamma + \mu\sin^2\varepsilon = 0 & (2) \\ \mu\cos^2\varepsilon - \lambda + \gamma\sin^2\varepsilon = 0 & (1) \\ \mu\cos^2\varepsilon - \gamma + \lambda\sin^2\varepsilon = 0 & (2) \\ \gamma\cos^2\varepsilon - \lambda + \mu\sin^2\varepsilon = 0 & (3) \\ \gamma\cos^2\varepsilon - \mu + \lambda\sin^2\varepsilon = 0 & (3). \end{cases}$$

Der Hauptschnitt besteht aus den Ellipsen (1) und (3) und der Hyperbel (2). Untersuche ich die Schnittpunkte der Kegelschnitte mit der x-Achse, so zeigt sich, daß die Ellipsen, eine innerhalb der anderen im Innern der Fokalparabel liegen, während die Hyperbel außerhalb liegt. Die sechs Schnittpunkte mit der x-Achse liegen in bezug auf den Mittelpunkt von $\overline{B_0 C_0}: x = -\frac{\beta + \gamma}{2}$ symmetrisch.

Setze ich in den Gleichungen II statt γ β und betrachte λ, μ als die laufenden parabolischen Koordi-

naten der xz-Ebene mit dem Brennpunkt C_0, so erhalte ich den zweiten Hauptschnitt der Fläche. Dieser besteht gleichfalls aus zwei Ellipsen und einer Hyperbel. Die Ellipsen liegen innerhalb der rechten Fokalparabel, die Hyperbel liegt außerhalb derselben. Sie sind den Kegelschnitten der xy-Ebene paarweise kongruent. (In der Fig. 8 sind die beiden Hauptschnitte der Fläche I geometrisch dargestellt.)

Wie aus den Gleichungen II (2) folgt, ist die Hyperbel (2) der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus die linke Fokalparabel unter dem Winkel 2ε oder $\pi - 2\varepsilon$ gesehen wird. Dieselbe Bedeutung hat die Hyperbel der xz-Ebene für die rechte Fokalparabel.

Die Hauptschnitte der reellen Schalen sind:

		1. Schale	6. Schale
xy-Ebene	$\lambda = \gamma$	$\gamma\cos^2\varepsilon - \mu + \nu\sin^2\varepsilon = 0$ (b)	$\nu\cos^2\varepsilon - \mu + \gamma\sin^2\varepsilon = 0$ (b′)
	$\mu = \gamma$	$\lambda\cos^2\varepsilon - \gamma + \nu\sin^2\varepsilon = 0$ (a)	$\nu\cos^2\varepsilon - \gamma + \lambda\sin^2\varepsilon = 0$ (a′)
xz-Ebene	$\mu = \beta$	$\lambda\cos^2\varepsilon - \beta + \nu\sin^2\varepsilon = 0$ (d)	$\nu\cos^2\varepsilon - \beta + \lambda\sin^2\varepsilon = 0$ (d′)
	$\nu = \beta$	$\lambda\cos^2\varepsilon - \mu + \beta\sin^2\varepsilon = 0$ (c)	$\beta\cos^2\varepsilon - \mu + \lambda\sin^2\varepsilon = 0$ (c′).

Jeder Hauptschnitt einer Schale besteht aus einem Hyperbelzweige und einer Ellipse.

Für die ausgezeichneten Werte $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = \pi/4$ vereinfacht sich die Fläche I in folgender Weise:

Ist $\varepsilon = 0$, reduziert sich die 1. Schale auf die linke Fokalparabel, die 6. Schale auf die rechte Fokalparabel. Folglich sind die beiden Fokalparabeln der Ort der Scheitel der Rotationskegel.

Ist $\varepsilon = \pi/4$, stehen die Brennstrahlen senkrecht auf einander; die 1. und 6. Schale fallen zusammen, die

Fläche 6. Ordnung geht in eine doppelt zählende Fäche 3. Ordnung über. Die Hauptschnitte dieser Fläche, welche wir in § 20 noch ausführlicher behandeln werden, sind in Fig. 15 gezeichnet.

Nach den zu Anfang dieses Paragraphen gemachten Ausführungen hat unter der Annahme $\mu < \tau < \nu$ der von dem Punkte P (λ, μ, ν) an das Paraboloid τ gelegte Berührungskegel die ζ-Achse als innere Hauptachse, die $\xi\zeta$-Ebene als Hauptebene der größten Öffnung. Seine Erzeugenden bilden mit den Brennstrahlen stets Winkel, deren Summe oder Differenz den durch die erste Gleichung (7) bestimmten, festen Wert $\pm 2\alpha$ hat. Da 2α von der Koordinate μ des Punktes P unabhängig ist, hat es für alle Punkte der Schnittkurve der Paraboloide λ, ν denselben Wert.

Nehme ich umgekehrt 2α und τ als gegeben und λ, ν als laufende parabolische Koordinaten an, so sagt die erste Gleichung (7) oder:

$$\lambda \cos^2\alpha + \nu \sin^2\alpha - \tau = 0 \tag{9}$$

aus, daß alle Punkte (λ, μ, ν), die ihr genügen, die Scheitel solcher Berührungskegel an τ sind, welche die $\xi\zeta$-Ebene als Hauptebene der größten Öffnung haben, und denen der Wert $\pm 2\alpha$ in der oben angegebenen Bedeutung zukommt, sobald $\mu < \tau < \nu$, der Wert $\pm(\pi - 2\alpha)$, sobald $\lambda < \tau < \mu$. [Ist nämlich $\lambda < \tau < \mu$, muß die Summe oder Differenz der Winkel, die die Erzeugenden mit den Brennstrahlen bilden, aus der ersten Gleichung (8) berechnet werden. Folglich ist sie $\pi - 2\alpha$, denn da α der Gleichung (7) genügt, muß $\pi/_2 - \alpha$ die Gleichung (8) befriedigen.] Für $\tau = \mu$ wird $\varepsilon = \alpha$; der Berührungskegel geht in die Ebene $\eta = 0$ über. Da der Gleichung (9) nur die Koordinaten

solcher Punkte genügen, für welche $\lambda < \tau < \nu$, sind alle Berührungskegel reell.

In gleicher Weise folgt, daß der ersten Gleichung (8) oder:

$$\lambda \sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha - \tau = 0 \tag{10}$$

die Scheitel (λ, μ, ν) der Berührungskegel genügen müssen, welche die $\xi\zeta$-Ebene als Hauptebene der größten Öffnung haben, und denen der feste Wert. $\pm 2\alpha$ für $\lambda < \tau < \mu$, $\pm(\pi - 2\alpha)$ für $\mu < \tau < \nu$ zukommt (9) und (10) sind die Gleichungen zweier Schalen der Fläche 6. Ordnung:

III
$$\begin{cases} \lambda \cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha - \tau = 0 & \text{(1. Schale)} \\ \lambda \cos^2 \alpha + \mu \sin^2 \alpha - \tau = 0 & \text{(2. Schale)} \\ \mu \cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha - \tau = 0 & \text{(3. Schale)} \\ \mu \cos^2 \alpha + \lambda \sin^2 \alpha - \tau = 0 & \text{(4. Schale)} \\ \nu \cos^2 \alpha + \mu \sin^2 \alpha - \tau = 0 & \text{(5. Schale)} \\ \nu \cos^2 \alpha + \lambda \sin^2 \alpha - \tau = 0 & \text{(6. Schale).} \end{cases}$$

Der Hauptschnitt der Fläche mit der xy-Ebene hat die Gleichungen:

IV
$$\begin{cases} \lambda \cos^2 \alpha + \gamma \sin^2 \alpha - \tau = 0 & (1) \\ \lambda \cos^2 \alpha + \mu \sin^2 \alpha - \tau = 0 & (2) \\ \mu \cos^2 \alpha + \gamma \sin^2 \alpha - \tau = 0 & (1) \\ \mu \cos^2 \alpha + \lambda \sin^2 \alpha - \tau = 0 & (2) \\ \gamma \cos^2 \alpha + \mu \sin^2 \alpha - \tau = 0 & (3) \\ \gamma \cos^2 \alpha + \lambda \sin^2 \alpha - \tau = 0 & (3), \end{cases}$$

wo λ, μ die laufenden Koordinaten der xy-Ebene sind.

Die Kegelschnitte (1) und (3) sind Parabeln, die dem konfokalen System § 1 (2) angehören; die Hyperbel (2) ist zugleich der Ort aller Punkte, von denen aus der Hauptschnitt des Paraboloides τ unter dem Winkel 2α oder $\pi - 2\alpha$ erscheint.

Ein analoges Resultat ergibt sich für die x z-Ebene.

Untersuchen wir die Realität der Schalen III, so zeigt sich, daß die 1. und 6. Schale stets reell sind, während die Realität der übrigen Schalen von den Werten τ und α abhängt.

Den Schalen 2 bis 5 kommt nicht die Eigenschaft des geometrischen Ortes für die Scheitel bestimmter, reeller Berührungskegel zu.

Die Hauptschnitte der 1. und 6. Schale sind:

		1. Schale	6. Schale
xy-Ebene	$\lambda = \gamma$	$\gamma \cos^2\alpha + \nu \sin^2\alpha - \tau = 0$	$\nu \cos^2\alpha + \gamma \sin^2\alpha - \tau = 0$
	$\mu = \gamma$	$\lambda \cos^2\alpha + \nu \sin^2\alpha - \tau = 0$	$\nu \cos^2\alpha + \lambda \sin^2\alpha - \tau = 0$
xz-Ebene	$\mu = \beta$	$\lambda \cos^2\alpha + \nu \sin^2\alpha - \tau = 0$	$\nu \cos^2\alpha + \lambda \sin^2\alpha - \tau = 0$
	$\nu = \beta$	$\lambda \cos^2\alpha + \beta \sin^2\alpha - \tau = 0$	$\beta \cos^2\alpha + \lambda \sin^2\alpha - \tau = 0.$

Ist ε der Winkel, welchen die Brennstrahlen eines Kegels mit der inneren Hauptachse bilden, und kommen ε und α demselben Kegel zu, so müssen sie der Ungleichung:

$$0 < \varepsilon < \alpha < \pi/_2 \tag{11}$$

genügen[1]). Wir wollen in den Gleichungen I und III ε und α so annehmen, daß sie die Ungleichung (11) befriedigen. Dann gilt für die Schittkurve der 1. Schale I mit der 1. Schale III, sobald sie reell ist, folgendes: Alle Berührungskegel an τ, deren Scheitel auf der Kurve liegen, sind reell. Die Brennstrahlen bilden mit der ζ-Achse den Winkel ε, die Summe oder Differenz der Winkel, welche die Erzeugenden mit den Brennstrahlen bilden, hat den Wert $\pm 2\alpha$, weil keine Punkte,

[1]) Vergl. Staude: Anal. Geom. § 130. 5.

für die $\lambda < \tau < \mu$ ist, auf der Kurve liegen können; denn gäbe es einen solchen Punkt auf ihr, so müßte die innere Hauptachse des zugehörigen Berührungskegels die ξ-Achse sein; weiter müßte ihm der Wert $\frac{1}{4}(\pi - 2\alpha)$ zukommen, und, da die Brennstrahlen mit der ξ-Achse den Winkel $\pi/_2 - \varepsilon$ bilden, der Ungleichung (11) entsprechend:

$$0 < \pi/_2 - \varepsilon < \pi/_2 - \alpha < \pi/_2$$

sein. Da diese Ungleichung wegen $\varepsilon < \alpha$ nicht erfüllt wird, ist ein solcher Berührungskegel unmöglich. Folglich kommen auf der Schnittkurve nur Punkte vor, deren Koordinaten die Ungleichung $\mu < \tau < \nu$ erfüllen. Also haben alle Berührungskegel, deren Scheitel auf der Schnittkurve der 1. Schalen der Flächen I und III liegen, die ζ-Achse als innere Hauptachse und dieselben ε und α. Da durch ε und α ein Kegel seiner Gestalt nach bestimmt ist, sind alle diese Berührungskegel einander kongruent.

In gleicher Weise ergibt sich, daß alle Berührungskegel, deren Scheitel auf der Schnittkurve der 6. Schalen der Flächen I und III liegen, die ξ-Achse als innere Hauptachse haben, daß ihre Brennstrahlen mit der ξ-Achse den Winkel ε bilden, und die Summe oder Differenz der Winkel, welche die Erzeugenden mit den Brennstrahlen bilden, den festen Wert $\pm 2\alpha$ hat.

Folglich sind diese Berührungskegel sowohl unter einander als auch denen der ersten Schnittkurve kongruent.

Da für die erste Schnittkurve $\mu < \tau < \nu$, für die zweite $\lambda < \tau < \mu$ ist, können die Kurven für gewisse Werte τ nicht reell sein; die erste ist imaginär, sobald $\tau < \gamma$, die zweite, wenn $\tau > \beta$.

§ 16.

Hauptschnitte der Fläche 3. Ordnung:

$$(1)\qquad \begin{cases} A\lambda + B(\mu+\nu) + C = 0 \\ A\mu + B(\nu+\lambda) + C = 0 \\ A\nu + B(\lambda+\mu) + C = 0. \end{cases}$$

Die Fläche ist doppelt zählend ein Spezialfall der Fläche 6. Ordnung, welcher aus der allgemeinen Gleichung durch Gleichsetzen der Koeffizienten B und C gewonnen wird (vergl. § 10 II u. III).

Bilden wir das Produkt der linken Seiten der Gleichungen (1) und rechnen dasselbe nach den Formeln (14) des § 7 in die q, r, s um, so erhalten wir als Gleichung der Fläche:

$$(2)\quad \begin{cases} AB^2q^3+(A+2B)C^2q+(2A+B)BCq^2+(A-B)^2Cr \\ \qquad +(A-B)^3s+(A-B)^2Bqr+C^3=0. \end{cases}$$

Die Schnittkurven der Fläche mit der xy-Ebene sind:

$$\left.\begin{aligned} A\lambda + B\mu + B\gamma + C &= 0 \\ A\mu + B\lambda + B\gamma + C &= 0 \end{aligned}\right\} c_z^2$$
$$A\gamma + B(\lambda+\mu) + C = 0 \Big\} c_z^1,$$

mit der xz-Ebene:

$$(4)\qquad \left.\begin{aligned} A\lambda + B\mu + B\beta + C &= 0 \\ A\mu + B\lambda + B\beta + C &= 0 \end{aligned}\right\} c_y^2$$
$$A\beta + B(\lambda+\mu) + C = 0 \Big\} c_y^1,$$

wo λ, μ in (3) die parabolischen Koordinaten der xy-Ebene mit dem Brennpunkt B_0, in (4) die der xz-Ebene mit dem Brennpunkt C_0 sind. Folglich wird jede der beiden Ebenen in einem Kegelschnitt c_z^2 bez. c_y^2 und einer Geraden c_z^1 bez. c_y^1 getroffen (vergl. Fig. 9—19). Die Art der Kegelschnitte läßt sich mit Hülfe von § 6 feststellen.

Die Geraden schneiden die Kegelschnitte in den Punkten der linken Fokalparabel:

$$(5) \qquad \lambda = \gamma,\ \mu = \gamma,\ \nu = -\frac{C + (A + B)\gamma}{B}$$

bez. der rechten Fokalparabel:

$$(6) \qquad \lambda = -\frac{C + (A + B)\beta}{B},\ \mu = \beta,\ \nu = \beta.$$

Die Punkte (5) und (6) sind als Doppelpunkte der Schnittkurven auch Doppelpunkte der Fläche.

Die Ebene $x = o$ ist in bezug auf die Fläche (1) nicht vor den anderen Ebenen $x = \text{konst.}$ ausgezeichnet. Wir wollen daher allgemein die Schnittkurve der Fläche mit der Ebene $x = x'$ untersuchen. Setzen wir zu diesem Zwecke in der Gleichung (2) $x = x'$, so geht sie in eine Gleichung 2. Grades in y und z über. Also wird die Ebene $x = x'$ von der Fläche in einer Kurve 2. Ordnung geschnitten. In parabolischen Koordinaten lautet die Gleichung der Ebene $x = x'$:

$$(7) \qquad \lambda + \mu + \nu = \beta + \gamma - 2x'.$$

Ihre Schnittkurve mit der Fläche (1) läßt sich, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{B(\beta + \gamma - 2x') + C}{B - A} = c$$

setzen, als räumliche Kurve durch folgende drei Gleichungenpaare darstellen:

$$(8) \qquad \lambda = c,\ \lambda + \mu + \nu = \beta + \gamma - 2x';$$

$$(9) \qquad \mu = c,\ \lambda + \mu + \nu = \beta + \gamma - 2x';$$

$$(10) \qquad \nu = c,\ \lambda + \mu + \nu = \beta + \gamma - 2x'.$$

Je nachdem $-\infty < c \leqq \gamma,\ \gamma \leqq c \leqq \beta,\ \beta \leqq c < +\infty$, ist die durch (8), (9) oder (10) dargestellte Kurve reell.

Folglich ist die Schnittkurve der Fläche mit der Ebene $x = x'$ mit der Schnittkurve des Paraboloids $\tau = c$

des konfokalen Systems § 7 (5) mit dieser Ebene identisch. Hieraus erkennt man, daß die Ebene (7) von der Fläche (1) nur dann geschnitten wird, wenn das Paraboloid $\tau = c$ sie schneidet. Weiter sieht man, daß die Schnittkurve eine Ellipse wird, wenn $-\infty < c < \gamma$ oder $\beta < c < +\infty$, eine Hyperbel, wenn $\gamma < c < \beta$, eine Gerade, wenn $c = \gamma$ oder $c = \beta$.

Da für $c = \gamma$

$x' = \frac{A\gamma + B\beta + C}{2B}$, für $c = \beta$ $x' = \frac{A\beta + B\gamma + C}{2B}$ ist,

gibt es zwei ausgezeichnete Ebenen:

$x = x_1 = \frac{A\gamma + B\beta + C}{2B}$ und $x = x_2 = \frac{A\beta + B\gamma + C}{2B}$,

welche von der Fläche in einer Geraden geschnitten werden. Weil $\tau = \gamma$ und $\tau = \beta$ die xy- bez. die xz-Ebene darstellen, müssen jene Geraden in diesen Ebenen liegen und daher mit den Geraden c_z^1 bez. c_y^1 identisch sein.

§ 17.

Die Doppelpunkte der Fläche:

$$(1) \quad \begin{cases} A\lambda + B(\mu + \nu) + C = 0 & \text{(1. Schale)} \\ A\mu + B(\nu + \lambda) + C = 0 & \text{(2. Schale)} \\ A\nu + B(\lambda + \mu) + C = 0 & \text{(3. Schale).} \end{cases}$$

Aus demselben Grunde, wie bei den Flächen 6. Ordnung, wollen wir auch hier den durch jede einzelne der Gleichungen (1) dargestellten Teil der Fläche eine Schale derselben nennen. Die Trennung der Fläche in 3 Schalen gibt uns über ihre Doppelpunkte Aufschluß. Da die Ausführungen des § 12 und § 13, wenn wir in den dort vorkommenden Bedingungsgleichungen $C = B$ und $D = C$ setzen, auch für unsere Fläche gelten, kann eine einzelne Schale

nur dann Doppelpunkte haben, wenn sie durch einen Teil der x-Achse geht. Dies tritt nach § 12 nur ein, wenn eine der drei Gleichungenpaare:

(2) $\qquad B = 0,\ A\gamma + C = 0,$

(3) $\qquad B = 0,\ A\beta + C = 0,$

(4) $\qquad A = 0,\ B(\beta + \gamma) + C = 0$

erfüllt ist. In diesen Fällen zeigt die Fläche (1) ein besonderes Verhalten. Im Falle (2) geht sie in die doppelt zählende xy-, im Falle (3) in die doppelt zählende xz-Ebene über; auch im Falle (4) erhalten wir eine Fläche, welche von den übrigen abweicht. Wir werden sie in § 21 noch näher kennen lernen. Sehen wir von diesen drei besonderen Fällen ab, so hat eine einzelne Schale keine Doppelpunkte. Die Doppelpunkte und Doppelkurven können nur dadurch zustande kommen, daß zwei Schalen sich schneiden oder berühren.

Wie man aus den Gleichungen (1) ersieht, sind die gemeinsamen Punkte der 1. und 2. Schale:

$$(5) \qquad \lambda = \gamma,\ \mu = \gamma,\ \nu = -\frac{C + (A + B)\gamma}{B},$$

die gemeinsamen Punkte der 2. und 3. Schale:

$$(6) \qquad \lambda = -\frac{C + (A + B)\beta}{B},\ \mu = \beta,\ \nu = \beta.$$

Die 3. und 1. Schale haben keine gemeinsamen Punkte, weil $\lambda - \nu$ nicht gleich 0 werden kann. Auch die Realität der Punkte (5) und (6) ist nur eine bedingte. Um dies übersehen zu können, nehmen wir B als positiv an, was man ohne Beschränkung tun darf solange man die Vorzeichen von A und C beliebig läßt; dann erhält man mit den Abkürzungen:

$$(7) \quad -\Big(B\beta + (A + B)\gamma\Big) = F_1,\ -\Big(B\gamma + (A + B)\beta\Big) = F_2$$

folgendes Resultat:

Die beiden gemeinsamen Punkte der 1. und 2. Schale sind reell, solange $-\infty < C < F_1$, und bewegen sich, während C dieses Intervall durchläuft, auf der linken Fokalparabel aus dem Unendlichen nach ihrem Scheitel C_0; die beiden gemeinsamen Punkte der 2. und 3. Schale sind reell, solange $F_2 < C < +\infty$, und bewegen sich, während C dieses Intervall durchläuft, auf der rechten Fokalparabel von B_0 nach dem Unendlichen hin (vergl. die Fig. 9—19).

§ 18.

Die Hauptschnitte der Schalen.

Die Schnitte der einzelnen Schalen mit der xy- und xz-Ebene lassen sich als räumliche Kurven durch folgende Gleichungenpaare darstellen:

		1. Schale		2. Schale	
xy-Ebene	$\lambda = \gamma$	$A\gamma + B(\mu + \nu) + C = 0$	(h)	$A\mu + B\nu + B\gamma + C = 0$	(i)
	$\mu = \gamma$	$A\lambda + B\nu + B\gamma + C = 0$	(i′)	$A\gamma + B(\lambda + \nu) + C = 0$	(h′)
xz-Ebene	$\mu = \beta$	$A\lambda + B\nu + B\beta + C = 0$	(l)	$A\beta + B(\lambda + \nu) + C = 0$	(m′)
	$\nu = \beta$	$A\lambda + B\mu + B\beta + C = 0$		$A\mu + B\lambda + B\beta + C = 0$	(n)

		3. Schale	
xy-Ebene	$\lambda = \gamma$	$A\nu + B\mu + B\gamma + C = 0$	(k)
	$\mu = \gamma$	$A\nu + B\lambda + B\gamma + C = 0$	
xz-Ebene	$\mu = \beta$	$A\nu + B\lambda + B\beta + C = 0$	(n′)
	$\nu = \beta$	$A\beta + B(\lambda + \mu) + C = 0$	(m)

Die Schnittkurven der drei Schalen zusammengenommen bilden hiernach in jeder Ebene einen Kegelschnitt und eine Gerade, wie wir auch in § 16

gesehen haben. In jeder Ebene gehört der Kegelschnittzweig, welcher nicht von der Geraden geschnitten wird, einer Schale ganz an, und zwar in der xy-Ebene der Zweig (k) der 3. Schale, in der xz-Ebene der Zweig (l) der 1. Schale. Die beiden anderen Zweige werden von den Geraden auf den Fokalparabeln in den Doppelpunkten der Fläche geschnitten. Sie verteilen sich auf die Schalen in folgender Weise:

Die außerhalb der Fokalparabeln liegenden Teile der Geraden, (h') und (m'), und die innerhalb der Fokalparabeln liegenden Teile der Kegelschnittzweige, (i) und (n), gehören der 2. Schale an, während die übrigen Teile, in der xy-Ebene (h) und (i'), der 1. Schale, in der xz-Ebene (m) und (n'), der 3. Schale zukommen.

Die Schnittkurven der Schalen mit der Ebene $x = x'$ stellen sich als räumliche Kurven beziehungsweise durch die Gleichungenpaare (8), (9), (10) des § 16 dar. Hieraus folgt, daß die Schnittkurve der 1. Schale nur dann reell sein kann, wenn $-\infty < c < \gamma$ ist; für die 2. Schale muß $\gamma < c < \beta$, für die 3. Schale $\beta < c < +\infty$ sein. c kann die drei Ungleichungen nicht gleichzeitig befriedigen. $c = \gamma$ genügt den beiden ersten, $c = \beta$ den beiden letzten Ungleichungen. Alle anderen c erfüllen stets nur eine Ungleichung. Folglich werden, da $c = \gamma$ und $c = \beta$ beziehungsweise die Schnittebenen: $x = x_1 = \frac{A\gamma + B\beta + C}{2B}$ und $x = x_2 = \frac{A\beta + B\gamma + C}{2B}$ entsprechen, alle Ebenen mit Ausnahme von $x = x_1$ und $x = x_2$ nur von einer Schale geschnitten. Die Ebene $x = x_1$ wird nach § 16 in der Geraden $c_z^1 = (h) + (h')$ von der Fläche geschnitten, wo (h) der Schnitt mit der 1. Schale, (h') der mit der 2. Schale ist; die Ebene $x = x_2$ schneidet die Fläche in der Geraden $c_y^1 = (m) + (m')$, wo (m) von dem Schnitte mit der 3. Schale, (m') von dem mit der 2. Schale herrührt.

Für alle Ebenen, die zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$ liegen, ist $\gamma < c < \beta$, für alle Ebenen außerhalb von $x = x_1$ ist $-\infty < c < \gamma$, für alle Ebenen außerhalb von $x = x_2$ ist $\beta < c < \infty +$.

Hieraus folgt, daß die Fläche 3. Ordnung durch die Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$ in ihre drei Schalen getrennt wird, innerhalb der beiden Ebenen erstreckt sich die 2. Schale, außerhalb von $x = x_1$ liegt die 1. Schale, außerhalb von $x = x_2$ die 3. Schale. Die Schnittkurven der Ebenen $x = x'$ mit der 1. und 3. Schale sind Ellipsen, mit der 2. Schale Hyperbeln. Die Scheitel dieser Kegelschnitte liegen auf den Schnitten der Schalen mit der xz- und xy-Ebene, ihre Mittelpunkte auf der x-Achse.

§ 19.

Die Gestalt der reellen Schalen der Fläche 3. Ordnung.

Da das Vorzeichen des Produktes AB auf die Gestalt der Fläche Einfluß hat, wollen wir die beiden Fälle: $A = a^2$, $B = b^2$ und $A = -a^2$, $B = b^2$ getrennt behandeln:

Im ersten Falle lautet die Gleichung der Fläche:

$$\text{I} \qquad \begin{cases} a^2\lambda + b^2(\mu + \nu) + C = 0 & \text{(1. Schale)} \\ a^2\mu + b^2(\nu + \lambda) + C = 0 & \text{(2. Schale)} \\ a^2\nu + b^2(\lambda + \mu) + C = 0 & \text{(3. Schale).} \end{cases}$$

Die Abkürzungen F_1, F_2, x_1, x_2 haben die Werte:

$$(1)\quad F_1 = -\left(b^2\beta + (a^2 + b^2)\gamma\right),\ F_2 = -\left(b^2\gamma + (a^2 + b^2)\beta\right),$$

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a^2\gamma + b^2\beta + C}{2b^2},\ x_2 = \dfrac{a^2\beta + b^2\gamma + C}{2b^2}, \\ x_2 - x_1 = \dfrac{(a^2 - b^2)(\beta - \gamma)}{2b^2}. \end{cases}$$

Die Schnittkurven der Fläche mit der xy- und xz-Ebene setzen sich in jeder Ebene aus einer Hyperbel und einer Geraden zusammen. Die Geraden $c_z^1 = (h) + (h')$ und $c_y^1 = (m) + (m')$ sind nach den Ausführungen des vorhergehenden Paragraphen stets Kanten der Fläche.

Untersuchen wir mit Hülfe der in § 12 angegebenen Methoden die Realität der Schalen, so zeigt sich, daß sie für alle Werte C reell sind. Aus den Gleichungen (2) folgt, daß die Ebene $x = x_2$ für $a^2 > b^2$ rechts von der Ebene $x = x_1$, für $a^2 < b^2$ links von ihr liegt. Also muß die Reihenfolge der Schalen von links nach rechts für $a^2 > b^2$ 1. 2. 3., für $a^2 < b^2$ 3. 2. 1. sein. Da die beiden Fälle nicht wesentlich von einander verschieden sind, wollen wir uns auf die Behandlung des Falles $a^2 > b^2$ beschränken. Aus der dritten Gleichung (2) sieht man, daß der Abstand der Ebene $x = x_1$ von $x = x_2$ unabhängig von C ist.

Betrachtet man die verschiedenen Entwicklungsphasen, welche die Fläche durchläuft, wenn C von $+\infty$ bis $-\infty$ abnimmt, so findet man (vergl. Fig. 9 und 10; der Abstand der Ebene $x = x_1$ von der Ebene $x = x_2$ ist in beiden Figuren verschieden, weil in Fig. 10 andere Werte für a^2 und b^2 wie in Fig. 9 genommen sind):

1. Stufe $+\infty > C > F_1$: Die drei Schalen nähern sich von rechts dem Brennpunkt C_0. Die 1. Schale ist von den beiden anderen völlig getrennt. Sie hat eine dem linken elliptischen Paraboloid ähnliche Gestalt. Die 2. und 3. Schale berühren sich in den Schnittpunkten der Geraden $c_y^1 = (m) + (m')$ mit der rechten Fokalparabel. Die 2. Schale beginnt in der Ebene $x = x_1$ mit der Kante (h') und endigt in der Ebene $x = x_2$ mit der Kante (m'). Ihre Gestalt hat

Ähnlichkeit mit einer Fläche, welche wir aus einem hyperbolischen Paraboloid durch folgende Deformation gewinnen können: Wir schneiden durch zwei zur x-Achse senkrechte Ebenen, von denen die linke durch den Scheitel des Paraboloids geht, einen Teil aus ihm heraus und drücken den rechten Schnittrand dieses Teils gegen die xz-, den linken gegen die xy-Ebene zusammen. Die 3. Schale beginnt in der Ebene $x = x_2$ mit der Kante (m) und erstreckt sich nach rechts ins Unendliche. Ihre Gestalt ähnelt einem rechten elliptischen Paraboloid, dessen Scheitel zu einer Kante auseinandergezogen wird. Grenzfall $C = F_1$: Die 1. Schale tritt mit der 2. im Punkte C_0 in Berührung.

2. Stufe $F_1 > C > F_2$: Von C_0 aus bewegen sich auf der linken Fokalparabel zwei symmetrisch zur x-Achse liegende, gemeinsame Punkte der 1. und 2. Schale gegen das Unendliche hin, so daß dieses Schalenpaar von $C = F_1$ an immer in Zusammenhang bleibt. Die Fläche hat jetzt vier reelle Doppelpunkte. Durch die Berührung mit der 2. Schale wird der Scheitel der 1. Schale zu der Kante (h) in die Länge gezogen. Auch das Aussehen der 2. Schale ändert sich, da ihre bisher einheitliche Kante (h') durch das Dazwischentreten von (h) in zwei Linienstücke zerfällt, die durch das Kurvenstück (i) mit einander verbunden werden. Die gemeinsamen Punkte der 2. und 3. Schale nähern sich immer mehr dem Brennpunkte B_0. Grenzfall $C = F_2$: Die 2. und 3. Schale berühren sich in B_0. Die Kante (m) reduziert sich auf einen Punkt, die beiden Linienstücke (m') vereinigen sich zu einer Geraden.

3. Stufe $-\infty < C < F_2$: Die 3. Schale trennt sich von der 2.; sämtliche Schalen entfernen sich von B_0 nach links gegen das Unendliche hin.

Bemerkenswert ist noch, daß für $C = F_1$ die Hyperbel c_y^2 der xz-Ebene in ein Linienpaar mit C_0 als Doppelpunkt, für $C = F_2$ die Hyperbel c_z^2 der xy-Ebene in ein Linienpaar mit B_0 als Doppelpunkt zerfällt.

Im Falle $A = -a^2$, $B = b^2$ hat die Fläche die Gleichungen:

$$\text{II} \quad \begin{cases} -a^2\lambda + b^2(\mu+\nu) + C = 0 & \text{(1. Schale)} \\ -a^2\mu + b^2(\nu+\lambda) + C = 0 & \text{(2. Schale)} \\ -a^2\nu + b^2(\lambda+\mu) + C = 0 & \text{(3. Schale).} \end{cases}$$

Die Abkürzungen F_1, F_2, x_1, x_2 haben die Werte:

$$(3) \quad \begin{cases} F_1 = (a^2 - b^2)\gamma - b^2\beta, \quad F_2 = (a^2 - b^2)\beta - b^2\gamma, \\ F_2 - F_1 = a^2(\beta - \gamma) > 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-a^2\gamma + b^2\beta + C}{2b^2}, \quad x_2 = \dfrac{-a^2\beta + b^2\gamma + C}{2b^2}, \\ x_2 - x_1 = -\dfrac{(a^2+b^2)(\beta-\gamma)}{2b^2} < 0. \end{cases}$$

Die Kegelschnitte c_z^2, c_y^2 sind Ellipsen. Die Reihenfolge der Schalen von links nach rechts ist 3. 2. 1. Als Bedingungen für die Realität der Schalen erhält man beziehungsweise: $-\infty < C < F_1$, $-\infty < C < +\infty$, $F_2 < C < +\infty$. Da $F_2 > F_1$ ist, schließt die Realität der 1. Schale die der 3. aus und umgekehrt. Die 2. Schale ist stets reell.

Verfolgt man die Entwicklung der Fläche, während C die Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft, so hat man folgende Stufen zu unterscheiden (vergl. die Fig. 11—16):

1. Stufe $+\infty > C > F_2$: Die 1. Schale ist imaginär. Die 3. Schale zieht sich aus der unendlich großen Kugel allmählich zusammen; sie besteht aus einer geschlossenen Fläche, die an ihrer rechten Seite in der

xz-Ebene die Kante (m) aufweist. Mit den Ecken dieser Kante steht sie mit der 2. Schale in Berührung. Diese dehnt sich zwischen den Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$ aus und hat eine der 2. Schale der Fläche I ähnliche Gestalt. Grenzfall $C = F_2$: Die 3. Schale hat sich auf den Brennpunkt B_0 zusammengezogen und verschwindet in diesem Punkte.

2. Stufe $F_2 > C > F_1$: Nur die 2. Schale ist reell. Grenzfall $C = F_1$: Die 1. Schale erscheint als Punkt in C_0.

3. Stufe $F_1 > C > -\infty$: Die 1. Schale wächst als geschlossene Fläche aus C_0 heraus. Sie hat an ihrer linken Seite in der xy-Ebene die Kante (h), in deren Endpunkten sie von der 2. Schale berührt wird. Sie dehnt sich beständig aus und strebt der unendlich großen Kugel zu, indem sie gleichzeitig die 2. Schale nach links ins Unendliche drängt.

Für $C = F_2$ wird die Ellipse c_z^z ein Nullkreis in B_0, für $C = F_1$ c_y^z ein Nullkreis in C_0.

§ 20.

Spezielle Flächen 3. Ordnung.

Nach § 15 ist der Ort der Scheitel aller Berührungskegel mit rechtwinkligen Fokallinien, welche an das System konfokaler Paraboloide gelegt werden können, durch die Gleichung:

$$\lambda + \nu - 2\mu = 0 \tag{1}$$

dargestellt. (1) ist die Gleichung einer Schale der Fläche 3. Ordnung:

$$\begin{cases} -2\lambda + (\mu + \nu) = 0 & \text{(1. Schale)} \\ -2\mu + (\nu + \lambda) = 0 & \text{(2. Schale)} \\ -2\nu + (\lambda + \mu) = 0 & \text{(3. Schale).} \end{cases} \tag{2}$$

Diese Fläche ist ein spezieller Fall der im vorigen Paragraphen behandelten Fläche II (vergl. Fig. 15). Nur die 2. Schale ist reell. Sie schneidet die xy-Ebene in den Kurven:

$$(3)\qquad \begin{cases} \left.\begin{aligned} -2\lambda+\mu+\gamma=0 \\ -2\mu+\lambda+\gamma=0 \end{aligned}\right\} c_z^2 \\ \left.-2\gamma+(\lambda+\mu)=0\right\} c_z^1, \end{cases}$$

die xz-Ebene in:

$$(4)\qquad \begin{cases} \left.\begin{aligned} -2\lambda+\mu+\beta=0 \\ -2\mu+\lambda+\beta=0 \end{aligned}\right\} c_y^2 \\ \left.-2\beta+(\lambda+\mu)=0\right\} c_y^1. \end{cases}$$

Die Geraden c_z^1 und c_y^1 sind die Direktricen der linken beziehungsweise rechten Fokalparabel. Die Ellipsen c_z^2 und c_y^2 sind einander kongruent; sie schneiden sich in dem Punkte R, welcher von den Brennpunkten B_0 und C_0 gleichweit entfernt ist. Ihre zweiten Schnittpunkte mit der x-Achse fallen mit dem Fußpunkt der Direktrix c_y^1 beziehungsweise c_z^1 zusammen. Das Verhältnis der Halbachsenquadrate der Ellipsen ist $\frac{a^2}{b^2}=\frac{9}{8}$.

Die Schnitthyperbel mit der Ebene $x=x'$ verändert sich, während die Ebene von Q nach P läuft, in folgender Weise: In Q fällt die Hyperbel mit ihren Asymptoten in c_z^1 hinein. Entfernen wir uns von Q, so treten die Hyperbelzweige aus der xy-Ebene heraus. Ihre Scheitel durchlaufen den oberen beziehungsweise unteren Bogen von c_y^2, während die Asymptoten sich stetig gegen die xz-Ebene drehen. In R geht die Hyperbel in die senkrecht auf einander stehenden Asymptoten über. Sie verläßt damit die bisher innegehabte Winkelfläche der Asymptoten und tritt in die andere ein, indem ihre Scheitel auf der Ellipse c_z^2

weiterlaufen. Die Hyperbel streckt sich immer mehr in die Länge, um schließlich mit der Geraden c_y^1 zusammenzufallen.

Die Gleichung der Fläche (2) in rechtwinkligen Koordinaten folgt aus der Gleichung (2) des § 16, wenn wir $A = -2$, $B = 1$, $C = 0$ setzen:

$$-2q^3 - 27s + 9qr = 0. \tag{5}$$

(5) ist nach dem Vorhergehenden die Gleichung des Ortes der Scheitel der Berührungskegel mit rechtwinkligen Fokallinien.

Eine andere spezielle Fläche erhalten wir auf folgende Weise:

Ist ein Kegel in den laufenden Koordinaten x', y', z' durch die Gleichung:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0,\ a^2 > b^2 \tag{6}$$

gegeben, so stehen unter der Bedingung:

$$a^2 - b^2 - c^2 = 0 \tag{7}$$

seine Fokal- und Scheitellinien in der Hauptebene der größten Öffnung senkrecht auf einander[1]). Wir nehmen nun an, daß der durch (6) dargestellte Kegel der von dem Punkte P (λ, μ, ν) an das Paraboloid τ gelegte Berührungskegel sei. Seine Hauptachsengleichung in den laufenden Koordinaten ξ, η, ζ lautet dann:

$$\frac{\xi^2}{\tau - \lambda} + \frac{\eta^2}{\tau - \mu} + \frac{\zeta^2}{\tau - \nu} = 0. \tag{8}$$

In den neuen Halbachsenquadraten wird, je nachdem die $\eta\zeta$-, $\zeta\xi$- oder $\xi\eta$-Ebene die Hauptebene der größten Öffnung ist, die Bedingungsgleichung (7) bezüglich:

[1]) Vergl. Staude: Anal. Geom. des Punktepaares usw. § 54 (18).

$$(9) \qquad -\lambda + (\mu + \nu) - \tau = 0,$$
$$(10) \qquad -\mu + (\nu + \lambda) - \tau = 0,$$
$$(11) \qquad -\nu + (\lambda + \mu) - \tau = 0.$$

Fassen wir in diesen Gleichungen τ als gegeben und λ, μ, ν als laufende parabolische Koordinaten auf, so stellt die Gleichung (9) den Ort der Scheitel aller Berührungskegel dar, deren $\eta\zeta$-Ebene die Hauptebene der größten Öffnung ist, und deren Fokal- und Scheitellinien aufeinander senkrecht stehen. Dasselbe gilt entsprechend für die Gleichungen (10) und (11). Die drei Gleichungen zusammengenommen stellen die Fläche 3. Ordnung:

$$(12) \qquad \begin{cases} -\lambda + (\mu + \nu) - \tau = 0 & \text{(1. Schale)} \\ -\mu + (\nu + \lambda) - \tau = 0 & \text{(2. Schale)} \\ -\nu + (\lambda + \mu) - \tau = 0 & \text{(3. Schale)} \end{cases}$$

dar, indem jede von ihnen die Gleichung einer Schale derselben ist. In rechtwinkligen Koordinaten lautet die Gleichung der Fläche:

$$(13) \quad -q^3 + \tau^2 q + \tau q^2 - 4\tau r - 8s + 4qr - \tau^3 = 0.$$

Also läßt sich keiner der Örter (9), (10), (11) allein durch eine rationale Gleichung in x, y, z darstellen; erst alle drei zusammen ergeben eine Fläche 3. Ordnung. Da nur diejenigen Berührungskegel, welche die $\xi\zeta$-Ebene als Hauptebene der größten Öffnung haben, reell sind, hat allein die 2. Schale als geometrischer Ort für die Scheitel bestimmter, reeller Berührungskegel Bedeutung.

Für die Gestalt der Fläche (vergl. Fig. 16) gelten die für die Fläche II des vorhergehenden Paragraphen gemachten Ausführungen. Doch zeichnet sie sich vor jener dadurch aus, daß für sie die Ellipsen

c_z^2 und c_y^2 Kreise werden, deren Mittelpunkte die Brennpunkte B_0 und C_0, deren Radien $\left|\frac{\gamma-\tau}{2}\right|$ und $\left|\frac{\beta-\tau}{2}\right|$ sind.

§ 21.

Die Fläche:

$$(1)\qquad \begin{cases} \mu+\nu+C=0 & \text{(1. Schale)} \\ \nu+\lambda+C=0 & \text{(2. Schale)} \\ \lambda+\mu+C=0 & \text{(3. Schale).} \end{cases}$$

Die allgemeine Fläche 3. Ordnung erfährt gewisse Vereinfachungen, wenn in ihren Gleichungen eine der beiden Koeffizienten A, B = 0 wird. Ist B = 0, reduziert sich die Fläche auf das Paraboloid $\tau = -\frac{C}{A}$, für A = 0 gehen ihre Gleichungen, wenn wir noch durch B dividieren und $\frac{C}{B} = C$ setzen, in die Gleichungen (1) über.

Wir teilten in § 19 die Flächen 3. Ordnung in 2 Gruppen ein, je nachdem $A = a^2$, $B = b^2$ oder $A = -a^2$, $B = b^2$ war. Da für die Fläche (1) A = 0, B = 1 ist, gehört sie keiner der beiden Gruppen an. Sie ist gewissermaßen eine Übergangsfläche von einer Gruppe zur andern und zeigt daher mit beiden Gruppen Übereinstimmungen.

Die Schnittkurven ihrer Schalen mit den beiden Hauptebenen lassen sich durch folgende Tabelle darstellen:

	1. Schale	2. Schale	3. Schale
xy-Ebene	$\lambda=\gamma$ $\mu+\nu+C=0$ (h)	$\nu+\gamma+C=0$ (i)	$\mu+\gamma+C=0$ (k)
	$\mu=\gamma$ $\nu+\gamma+C=0$ (i′)	$\nu+\lambda+C=0$ (h′)	$\lambda+\gamma+C=0$
xz-Ebene	$\mu=\beta$ $\nu+\beta+C=0$ (l)	$\nu+\lambda+C=0$ (m′)	$\lambda+\beta+C=0$ (n′)
	$\nu=\beta$ $\mu+\beta+C=0$	$\lambda+\beta+C=0$ (n)	$\lambda+\mu+C=0$ (m).

Die ganze Fläche schneidet hiernach jede der beiden Hauptebenen in einer Geraden und einer Parabel, welche der konfokalen Parabelschar der betreffenden Ebene angehört.

Untersuchen wir die Abhängigkeit dieser Kurven von dem Parameter C und ihre Verteilung auf die drei Schalen, so ergibt sich (vergl. die Fig. 17—19):

In der xy-Ebene wandert, während C die Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft, die Gerade (h) + (h′) von rechts, aus dem Unendlichen kommend, nach links gegen das Unendliche, indem sie stets durch den Scheitel der Parabel der xz-Ebene geht. Sie gehört, solange $C > -(\beta+\gamma)$, der 2. Schale, wenn $C < -(\beta+\gamma)$, soweit sie außerhalb der linken Fokalparabel liegt, der 2., soweit sie innerhalb derselben liegt, der 1. Schale an. Die reelle Parabel der Ebene ist die Parabel (k), solange $C > -(\beta+\gamma)$, die Parabel (i) + (i′), wenn $C < -(\beta+\gamma)$. (k), welches alle linken Parabeln des konfokalen Systems durchläuft, gehört stets der 3. Schale an. Die Parabel (i) + (i′) durchläuft alle rechten konfokalen Parabeln und gehört innerhalb der linken Fokalparabel der 2. Schale, außerhalb der 1. Schale an.

In der xz-Ebene kommt die Gerade (m) + (m′), während C die Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft von rechts aus dem Unendlichen und entfernt sich nach links gegen das Unendliche, indem sie stets durch den Scheitel der Parabel der xy-Ebene geht. Sie kommt innerhalb der rechten Fokalparabel der 3. Schale, außerhalb der 2. Schale zu. Die reelle Parabel der xz-Ebene ist die Parabel (n) + (n′), solange $C > -(\beta+\gamma)$, die Parabel (l), wenn $C < -(\beta+\gamma)$. Die Parabel (n) + (n′), welche alle linken konfokalen Parabeln der Ebene durchläuft, gehört innerhalb der rechten Fokalparabel der 2. Schale, außerhalb der 1. Schale

an. Die Parabel (l) durchläuft alle rechten konfokalen Parabeln und kommt stets der 1. Schale zu.

Für $C = -(\beta + \gamma)$ bestehen die Schnittkurven der Fläche mit den beiden Ebenen aus den Geraden (h') und (m') und der x-Achse. Die Geraden und das Stück $\overline{B_0 C_0}$ der x-Achse kommen der 2. Schale, das Stück rechts von C_0 der 1., das Stück links von B_0 der 3. Schale zu (vergl. Fig. 18).

Die Schnittkurve der Fläche mit der Ebene $x = x'$ ist der Kegelschnitt:

$$(2) \quad \frac{y^2}{2x' - \gamma - C} + \frac{z^2}{2x' - \beta - C} + \beta + \gamma + C = 0.$$

Für $x = x_1 = \frac{\beta + C}{2}$ ist (2) mit der Geraden (h) + (h'), für $x = x_2 = \frac{\gamma + C}{2}$ mit der Geraden (m) + (m') identisch. (2) ist eine reelle Hyperbel, wenn $x_2 < x' < x_1$, eine reelle Ellipse, wenn $x' < x_2$, $C > -(\beta + \gamma)$ oder $x' > x_1$, $C < -(\beta + \gamma)$, eine imaginäre Ellipse, wenn $x' < x_2$, $C < -(\beta + \gamma)$ oder $x' > x_1$ $C > -\beta + \gamma)$. Für den besonderen Fall $C = -(\beta + \gamma)$ zerfällt (2) in das Linienpaar:

$$(3) \quad \frac{y^2}{2x' + \beta} + \frac{z^2}{2x' + \gamma} = 0,$$

dessen Doppelpunkt auf der x-Achse liegt. Das Linienpaar ist reell, wenn $x_2 < x' < x_1$, imaginär mit reellem Doppelpunkt, wenn $x' < x_2$ oder $x' > x_1$. Die Bedingungen für die Realität der einzelnen Schalen sind beziehungsweise:

$$-\infty < C \leq -(\beta + \gamma), \quad -\infty < C < +\infty,$$
$$-(\beta + \gamma) \leq C < +\infty.$$

Die 2. Schale ist stets reell, die 1. und 3. Schale sind nur für $C = -(\beta + \gamma)$ zugleich reell; sonst schließt die Realität der einen Schale die der anderen aus.

Die gemeinsamen Punkte zweier Schalen, nämlich der 1. und 2. Schale:

$$\lambda = \gamma,\ \mu = \gamma,\ \nu = -(C+\gamma)\ \left(\text{reell für } -\infty < C \leq -(\beta+\gamma)\right)$$

und der 2. und 3. Schale:

$$\lambda = -(C+\beta),\ \mu = \beta,\ \nu = \beta\ (\text{reell für } -(\beta+\gamma) \leq C < +\infty)$$

sind die reellen Doppelpunkte der Fläche (vergl. § 17).

Die Entwicklungsstufen, welche die Fläche durchläuft, während C von $+\infty$ bis $-\infty$ geht, sind folgende: 1. Stufe $+\infty > C > -(\beta+\gamma)$: Die 1. Schale ist imaginär, die 2. und 3. Schale sind reell. Ihre beiden gemeinsamen Punkte bewegen sich auf der rechten Fokalparabel, aus dem Unendlichen kommend, nach B_0. Die 2. Schale endet rechts mit der Kante (h'), links mit den Kanten (m'). Ihre Gestalt ähnelt der beschriebenen 2. Schale der Fläche I des § 19. Die 3. Schale dehnt sich links von der 2. aus. Ihre Gestalt hat Ähnlichkeit mit einem linken elliptischen Paraboloid, dessen Scheitel zu der Kante (m) auseinandergezerrt ist (vergl. Fig. 17). Grenzfall $C = -(\beta+\gamma)$: Die 3. Schale hat sich auf das Stück der x-Achse links von B_0 zusammengezogen; die 1. Schale beginnt als Linienstück $C_0 \infty$ (vergl. Fig. 18). Die 2. Schale hat die Geraden (h') und (m') zu Kanten. Ihre Schnittkurven mit den Ebenen $x = x'$ sind Linienpaare, deren Doppelpunkte die Doppellinie $\overline{B_0 C_0}$ der Schale bilden. Für $x' = -\gamma/2$ fällt das Linienpaar mit (h') zusammen. Durchläuft x' die Werte von $-\gamma/2$ bis $-\beta/2$, hebt sich das Linienpaar aus der

xy-Ebene heraus und dreht sich stetig gegen die xz-Ebene, bis es für $x' = -\beta/_2$ in die Gerade (m') hineinfällt.

2. Stufe $-\infty < C < -(\beta + \gamma)$: Die 3. Schale ist imaginär; die Berührungspunkte der 1. und 2. Schale bewegen sich auf der linken Fokalparabel von C_0 nach dem Unendlichen. Sie haben dieselbe Gestalt, wie vorher die 3. und 2. Schale.

In rechtwinkligen Koordinaten lautet die Gleichung der Fläche (1):

$$(4) \qquad q\,r - s + C(q^2 + r) + 2\,C^2 q + C^3 = 0.$$

Die Bedeutung der Fläche als geometrischer Ort der Scheitel bestimmter Berührungskegel.

Ist ein Kegel durch die Gleichung:

$$(5) \qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0,\ a^2 > b^2$$

gegeben, so ist $a^2 = c^2$ die Bedingung dafür, daß die Scheitellinien des Kegels in der Hauptebene der größten Öffnung rechtwinklig sind, während für $b^2 = c^2$ die Hauptebene der kleinsten Öffnung rechtwinklige Scheitellinien hat[1]).

Der von dem Punkte P (λ, μ, ν) an das Paraboloid τ des konfokalen Systems § 7 (5) gelegte Berührungskegel hat die Gleichung:

$$(6) \qquad \frac{\xi^2}{\tau - \lambda} + \frac{\eta^2}{\tau - \mu} + \frac{\zeta^2}{\tau - \nu} = 0.$$

Unter der Annahme, daß (6) einen reellen Berührungskegel darstellt, ist die Hauptebene der größten Öffnung die $\xi\zeta$-Ebene, die Hauptebene der kleinsten Öffnung die $\xi\eta$- oder $\eta\zeta$-Ebene, je nachdem die ξ-

[1]) Vergl. O. Staude: Anal. Geom. § 54. 8.

oder die ζ-Achse die innere Hauptsache ist. Addiere ich die Halbachsenquadrate der η- und ζ-Achse, so erhalte ich:

$$\mu + \nu - 2\tau = 0. \tag{7}$$

Fasse ich μ und ν als laufende parabolische Koordinaten auf, so stellt (7) ein Flächenstück dar, von dessen Punkten sich reelle Berührungskegel mit der $\zeta\eta$-Ebene als Hauptebene der kleinsten Öffnung an das Paraboloid τ legen lassen. Da (7) nach dem oben Gesagten auch die Bedingung ist, daß diese Kegel rechtwinklige Scheitellinien in der $\zeta\eta$-Ebene haben, so ist (7) der Ort aller Punkte, von denen sich reelle Berührungskegel mit rechtwinkligen Scheitellinien in der $\zeta\eta$-Ebene an das Paraboloid τ legen lassen. In gleicher Weise folgt, daß durch:

$$(\lambda + \nu) - 2\tau = 0, \text{ beziehungsweise} \tag{8}$$

$$(\lambda + \mu) - 2\tau = 0 \tag{9}$$

der Ort aller Punkte dargestellt wird, von denen sich reelle Berührungskegel mit rechtwinkligen Scheitellinien in der $\xi\zeta$- beziehungsweise $\xi\eta$-Ebene an das Paraboloid τ legen lassen. Nun sind die Gleichungen (7), (8), (9), wenn wir $\tau = -\frac{C}{2}$ setzen, die Gleichungen der 1., 2. und 3. Schale der Fläche (1). Folglich lassen sich von allen Punkten jeder Schale unserer Fläche reelle Berührungskegel mit den für die entsprechenden Gleichungen in τ auseinandergesetzten Eigenschaften an das Paraboloid $\tau = -\frac{C}{2}$ legen.

Eine besondere Bedeutung haben die auf den Fokalparabeln liegenden gemeinsamen Punkte der 1. und 2. beziehungsweise 2. und 3. Schale. Für sie müssen sowohl in der Hauptebene der größten

Öffnung als auch in der der kleinsten die Scheitellinien senkrecht aufeinander stehen. Folglich sind sie die ausgezeichneten Punkte, in denen die Berührungskegel Rotationskegel mit rechtwinkligen Scheitellinien werden. Im Besonderen lassen sich von den Hauptbrennpunkten B_0, C_0 solche Kegel an das Paraboloid $\tau = \frac{\beta + \gamma}{2}$ legen.

§ 22.

Die Ebene:

(1) $$\lambda + \mu + \nu = c.$$

Sie ist dreifach zählend ein Spezialfall der Fläche 3. Ordnung, der durch Gleichsetzen der Koeffizienten A und B gewonnen wird (vergl. § 10 III und IV). Nach der Gleichung (14) des § 7 ist:

$$\lambda + \mu + \nu = \beta + \gamma - 2x.$$

Folglich wird durch (1) die Ebene:

(2) $$x = \frac{\beta + \gamma - c}{2}$$ dargestellt.

Die Bedeutung der Ebene als geometrischer Ort erhellt aus folgender Überlegung. Ist ein Kegel durch die Gleichung:

(3) $$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0$$

gegeben, so ist:

(4) $$a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

die Bedingung, daß der Kegel (3) dual gleichseitig ist[1]). Danach ist der von dem Punkte P (λ, μ, ν) an das Paraboloid τ gelegte Berührungskegel:

[1]) Vergl. Staude: Anal. Geom. usw. § 71. 10.

(5) $$\frac{\xi^2}{\tau-\lambda}+\frac{\eta^2}{\tau-\mu}+\frac{\zeta^2}{\tau-\nu}=0$$

dual gleichseitig, wenn:

$$\tau-\lambda+\tau-\mu+\tau-\nu=0 \text{ oder:}$$

(6) $$\lambda+\mu+\nu=3\tau$$

ist. Also ist die Ebene (1) der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus dual gleichseitige Kegel an das Paraboloid $\tau=\frac{c}{3}$ gelegt werden können.

In den Schnittpunkten der Ebene mit den Fokalparabeln muß nach § 15 der dual gleichseitige Kegel zugleich ein Rotationskegel sein.

§ 23.

Der Ort der Spitzen gleichseitiger Berührungskegel an das Paraboloid:

(1) $$\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}+2x+\tau=0.$$

Der von dem Punkte P (λ, μ, ν) an das Paraboloid (1) gelegte Berührungskegel:

(2) $$\frac{\xi^2}{\tau-\lambda}+\frac{\eta^2}{\tau-\mu}+\frac{\zeta^2}{\tau-\nu}=0$$

ist gleichseitig[1]), wenn:

$$\frac{1}{\tau-\lambda}+\frac{1}{\tau-\mu}+\frac{1}{\tau-\nu}=0 \text{ oder:}$$

$$(\tau-\mu)(\tau-\nu)+(\tau-\nu)(\tau-\lambda)+(\tau-\lambda)(\tau-\mu)=0 \text{ oder:}$$

(3) $$(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)-2\tau(\lambda+\mu+\nu)+3\tau^2=0$$

ist. Die Bedingungsgleichung (3) unterscheidet sich von den bisher behandelten Gleichungen dadurch, daß sie nicht mehr linear in λ, μ, ν ist. Trotzdem bietet

[1]) Vergl. O. Staude: Anal. Geom. usw. § 71. 10.

ihre geometrische Diskussion, wenn wir λ, μ, ν als laufende parabolische Koordinaten auffassen, keine Schwierigkeit, da sie in λ, μ, ν symmetrisch ist. Mit Hülfe der Formeln (14) des § 7 können wir sofort die parabolischen Koordinaten in rechtwinklige überführen. Wir erhalten:

$$r - 2q\tau + 3\tau^2 = 0 \text{ oder:}$$

$$(4)\quad \left\{-y^2 - z^2 - 2x(\beta+\gamma) + \beta\gamma\right\} - 2(\beta+\gamma-2x)\tau + 3\tau^2 = 0.$$

Folglich ist der Ort der Spitzen gleichseitiger Berührungskegel an das Paraboloid (1) das Rotationsparaboloid (4).

§ 24.

Weitere Betrachtungen über die behandelten speziellen Flächen.

Die Flächen § 20 (5) und (13), § 21 (4), wenn $C = -2\tau$ gesetzt wird, § 22 (2), wenn $C = 3\tau$ gesetzt wird, und § 23 (4) sind die Örter der Spitzen bestimmter Berührungskegel an das Paraboloid:

$$(1)\qquad \frac{y^2}{\beta-\tau} + \frac{z^2}{\gamma-\tau} + 2x + \tau = 0.$$

Diese Beziehungen müssen auch bestehen bleiben, wenn das Paraboloid nicht innerhalb eines Systems konfokaler Paraboloide betrachtet wird, sondern, allein für sich genommen, durch die Gleichung:

$$(2)\qquad \frac{y'^2}{p} + \frac{z'^2}{p-e} + 2x' - p = 0$$

gegeben ist. Zwischen den laufenden Koordinaten und den Koeffizienten der beiden Gleichungen müssen dann folgende Beziehungen bestehen:

$$(3)\qquad \begin{cases} \beta-\tau=p,\ \gamma-\tau=p-e,\ \beta-\gamma=e, \\ y=y',\ x=x'-\beta/_2,\ z=z'. \end{cases}$$

Die Gleichungen der oben angeführten Flächen sind in den laufenden Koordinaten x, y, z gegeben; die in ihnen vorkommenden Koeffizienten sind Funktionen von β, γ, τ. Denken wir uns jetzt das Paraboloid (1) durch die Gleichung (2) gegeben, so ändern die Flächen ihre Beziehungen zu dem Paraboloid nicht, wohl aber ändern sich ihre Gleichungen, da ein anderes Koordinatensystem und eine andere Bezeichnungsweise der Koeffizienten in der Gleichung des Paraboloids zugrunde gelegt wird. Wir erhalten die neuen Gleichungen aus den alten, indem wir die ungestrichenen Koordinaten mit Hülfe der Formeln (3) in die gestrichenen überführen und die nun auftretenden Koeffizienten so ordnen, daß sie Funktionen der nach (3) durch p und e leicht ausdrückbaren Verbindungen $(\beta-\tau)$, $(\gamma-\tau)$, $(\beta-\gamma)$ werden.

Die Gleichung § 20 (5):

$$(4)\qquad -2q^3-27s+9qr=0$$

geht dann in:

$$(4')\qquad \begin{cases} 16x'^3+18x'(y'^2+z'^2)-12x'^2(\beta-\gamma)-6x'(\beta-\gamma)^2 \\ +9z'^2(\beta-\gamma)-18y'^2(\beta-\gamma)+2(\beta-\gamma)^3=0, \end{cases}$$

die Gleichung 20 (13):

$$(5)\qquad -q^3+\tau^2q+\tau q^2-4\tau r-8s+4qr-\tau^3=0$$

in:

$$(5')\qquad \begin{cases} 8x'(x'^2+y'^2+z'^2)-8y'^2(\beta-\gamma) \\ \quad -4(z'^2+y'^2)(\gamma-\tau) \\ -4x'^2\big(2(\beta-\gamma)+(\gamma-\tau)\big)-2x'(\gamma-\tau)^2 \\ \quad +(\gamma-\tau)^2\big\{(\beta-\tau)+(\beta-\gamma)\big\}=0, \end{cases}$$

die Gleichung § 21 (4):

$$(6) \qquad q\,r - s - 2\tau(q^2 + r) + 8\tau^2 q - 8\tau^3 = 0$$

in:

$$(6') \begin{cases} 4x'^2\{(\beta-\tau)+(\gamma-\tau)\} + 2x'(y'^2+z'^2) \\ \quad -z'^2\{(\beta-\tau)+(\gamma-\tau)\} \\ -2y'^2(\beta-\tau) - 2x'\{3(\beta-\tau)^2 + 4(\beta-\tau)(\gamma-\tau) \\ \quad +(\gamma-\tau)^2\} + 2(\beta-\tau)\{(\beta-\tau)+(\gamma-\tau)\}^2 = 0, \end{cases}$$

die Gleichung § 22 (2):

$$(7) \qquad 2x = \beta + \gamma - 3\tau$$

in:

$$(7') \qquad 2x' = 2(\beta-\tau) + (\gamma-\tau),$$

die Gleichung § 23 (4):

$$(8) \begin{cases} \{-y^2 - z^2 - 2(\beta+\gamma)x + \beta\gamma\} - 2(\beta+\gamma-2x)\tau \\ \quad +3\tau^2 = 0 \end{cases}$$

in:

$$(8') \begin{cases} y'^2 + z'^2 + 2x'\{(\beta-\tau)+(\gamma-\tau)\} \\ -(\beta-\tau)\{(\beta-\tau)+2(\gamma-\tau)\} = 0 \end{cases}$$

über.

Setzen wir in den Gleichungen (4'), (5'), (6'), (7'), (8') für $(\beta-\tau)$, $(\gamma-\tau)$, $(\beta-\gamma)$ beziehungsweise p, p—e, e ein und schreiben statt x', y', z', x, y, z, indem wir einfach die Striche weglassen, so erhalten wir folgendes Resultat:

Ist das Paraboloid:

$$(9) \qquad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p = 0$$

gegeben, so sind die Örter der Spitzen der Berührungskegel, welche zugleich Rotationskegel sind, die Fokalparabeln:

$$(10) \qquad y^2 + 2ex - e^2 = 0,\ z^2 - 2ex = 0.$$

Der Ort der Spitzen der Berührungskegel mit rechtwinkligen Fokallinien ist die Fläche 3. Ordnung:

$$(11)\quad \begin{cases} 16x^3 + 18x(y^2+z^2) - 12ex^2 - 6e^2x + 9ez^2 \\ \qquad - 18ey^2 + 2e^3 = 0. \end{cases}$$

Da p in der Gleichung (11) nicht vorkommt, so folgt hieraus, daß die Fläche (11) die gleiche Bedeutung für alle Paraboloide mit denselben Fokalparabeln hat.

Der Ort der Spitzen der Berührungskegel, deren Fokal- und Scheitellinien aufeinander senkrecht stehen, ist die Fläche 3. Ordnung:

$$(12)\quad \begin{cases} 8x(x^2+y^2+z^2) - 8ey^2 - 4(p-e)(y^2+z^2) \\ -4(p+e)x^2 - 2(p-e)^2x + (p-e)^2(p+e) = 0. \end{cases}$$

Der Ort der Spitzen der Berührungskegel mit rechtwinkligen Scheitellinien in der Hauptebene der größten, beziehungsweise kleinsten Öffnung ist die Fläche 3. Ordnung:

$$(13)\quad \begin{cases} 2x(y^2+z^2) + 4(2p-e)x^2 - (2p-e)z^2 - 2py^2 \\ -2(8p^2 - 6pe + e^2)x + 2p(2p-e)^2 = 0. \end{cases}$$

Der Ort der Spitzen der dual gleichseitigen Berührungskegel ist die Ebene:

$$(14)\qquad x = \frac{3p-e}{2}.$$

Der Ort der Spitzen der gleichseitigen Berührungskegel ist das Rotationsparaboloid:

$$(15)\qquad y^2 + z^2 + 2(2p-e)x - p(3p-2e) = 0.$$

1. Schale | 2. Schale | 3. Schale | 4. Schale | 5. Schale | 6. Schale

Fig. 1.

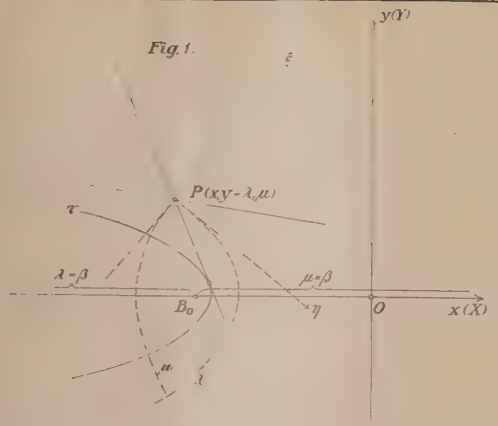


Fig. 2.

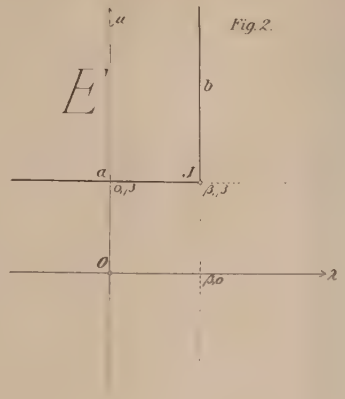


Fig. 7.

Fig. 3.

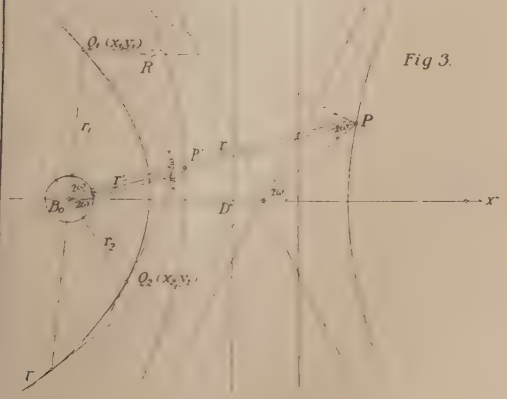


Fig. 4.

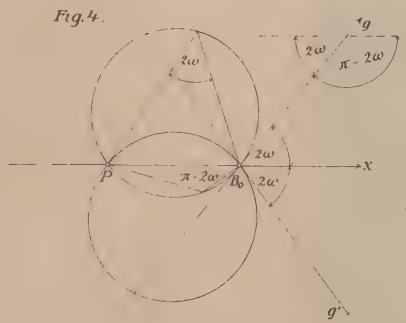


Fig. 5.

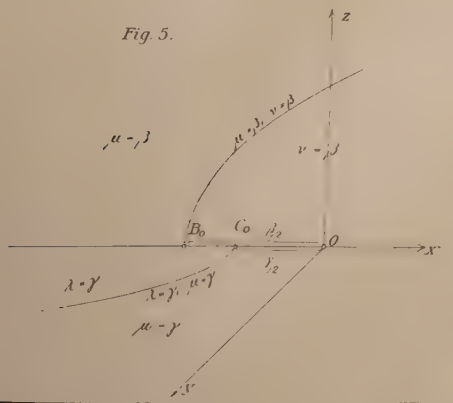


Fig. 6.

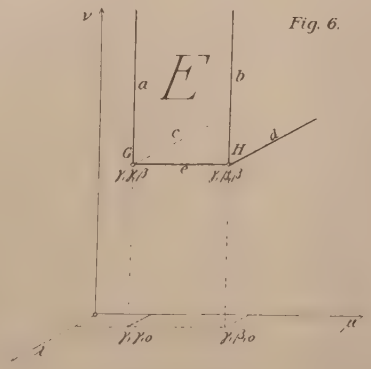


Fig. 8.

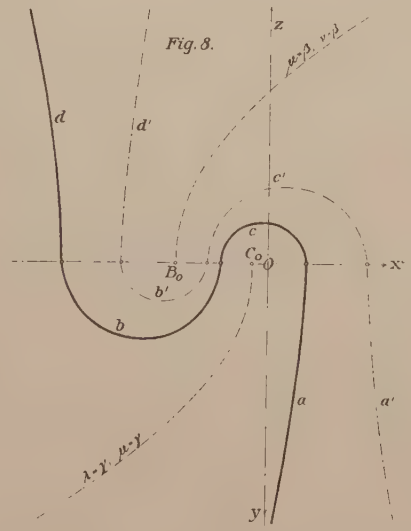
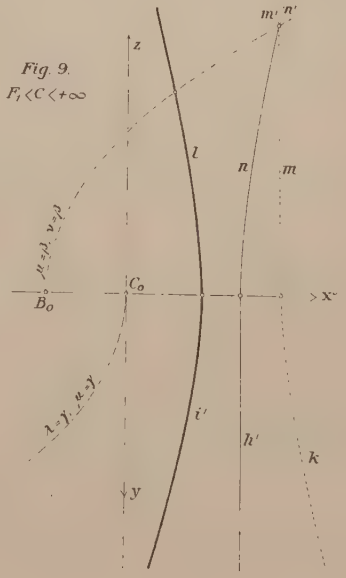


Fig. 9.
$F_1 < C < +\infty$



Gar. Boldt Hofbuchdr. Rostock

1. Schale 2. Schale 3. Schale

Fig. 10.
$F_2 < C < F_1$

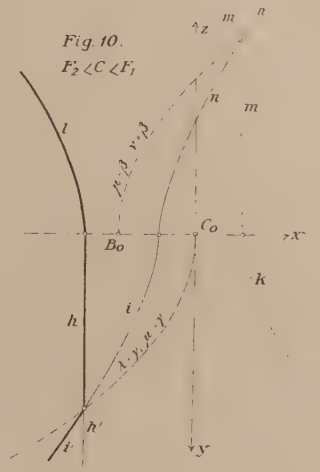


Fig. 11.
$F_2 < C < +\infty$

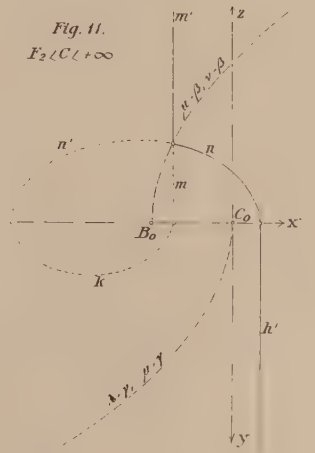


Fig. 12.
$C = F_2$

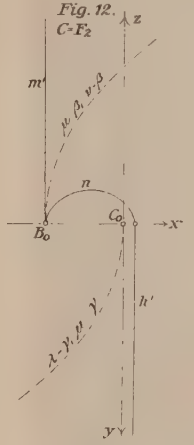


Fig. 13.
$C = F_1$

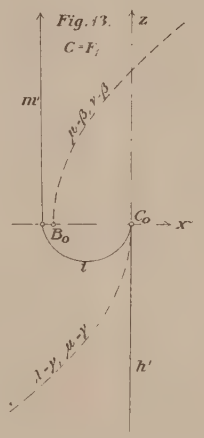


Fig. 14.
$-\infty < C < F_1$

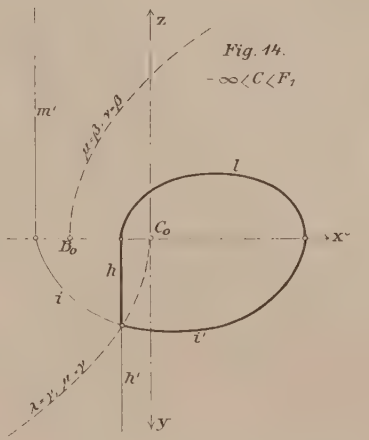


Fig. 15.
$F_1 < C < F_2$

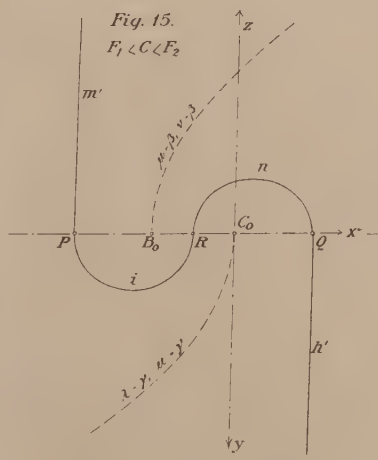


Fig. 16.
$F_2 < C < +\infty$

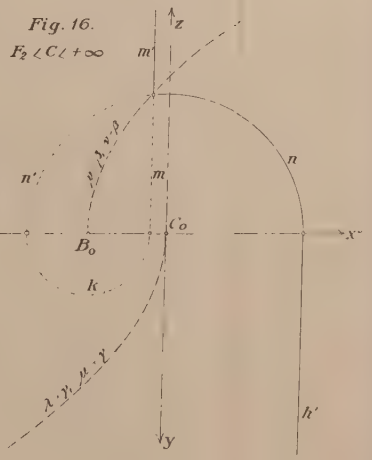


Fig. 17.
$+\infty > C > -(\beta+\gamma')$

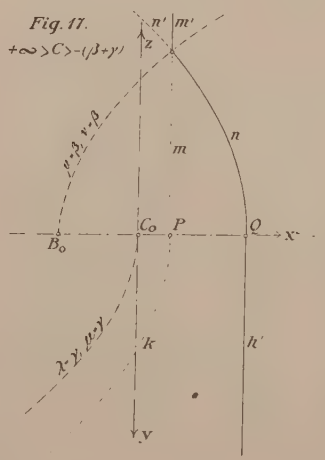


Fig. 18.
$C = -(\beta+\gamma')$

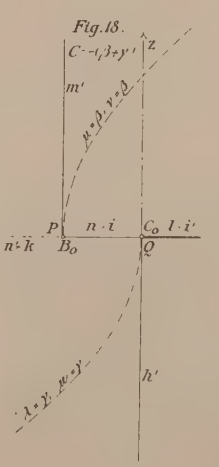
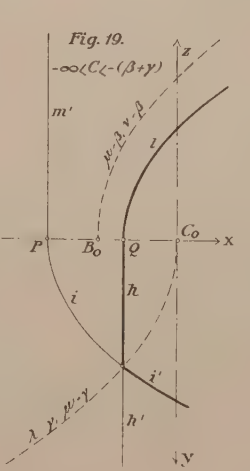


Fig. 19.
$-\infty < C < -(\beta+\gamma')$



Car. Bolck Hofbuchdr. Rastatt

Lebenslauf.

Ich, Friedrich Güßmar, bin geboren am 19. Januar 1885 als Sohn des Erbpächters Fritz Güßmar zu Uelitz (Mecklenburg-Schwerin). Von Ostern 1896 ab besuchte ich das Gymnasium zu Schwerin und verließ dasselbe Ostern 1905 mit dem Zeugnis der Reife. Vom 1. April 1905 bis zum 1. April 1906 genügte ich meiner Militärpflicht beim Füsilier-Regiment Nr. 90 zu Rostock. Von Ostern 1906 bis Ostern 1911 studierte ich Mathematik und Naturwissenschaften an den Universitäten zu Göttingen, München und Rostock und besuchte während dieser Zeit Vorlesungen und Übungen bei den Herren Professoren Hilbert, Berthold, Herglotz, Riecke, Runge, Wichert, Wallach, Bousset, Verworn, Grätz, Dieckmann, Furtwängler, v. Groth, Lipps, Person, Röntgen, Hahn, Pringsheim, Espenberger, Hegi, Lindemann, Sommerfeld, Voß, Staude, Spemann, Falkenberg, Heydweiller, Erhardt, Will, Ule, Grützmacher, Golther, Weber.

Allen diesen meinen verehrten Lehrern sage ich an dieser Stelle den herzlichsten Dank. Zu besonderem Danke fühle ich mich Herrn Professor Staude verpflichtet, der mich zu der vorliegenden Arbeit veranlaßte und mir fortgesetzt gütige Anregung und Förderung zu teil werden ließ.